

Edgar Berz

Kegelschnitte in Desarguesschen Ebenen

1959

KEGELSCHNITTE
IN DESARGUESSCHEN EBENEN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde
an der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

LUDWIG - MAXIMILIAN UNIVERSITAET

IN

MÜNCHEN

von

Edgar B e r z

in

München



Referenten: Professor Dr. Robert S c h m i d t

Professor Dr. Karl S t e i n

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1959

Meinem hochverehrten Lehrer und Förderer

Herrn Professor Dr. Robert S c h m i d t

in Dankbarkeit gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kegelschnitt der Desarguesschen Ebene als Erzeugnis projektiver Büschel.

	Seite
Perspektivität, Projektivität, Definition der C_2	1
Perspektive Kollineation	2
Projektive Kollineation	3
Parameterdarstellung der Projektivität	5
C_2 -Gleichung	6

II. Konstruktion einer speziellen Desarguesschen Ebene.

Schnittpunktsatz	11
Strukturanalyse zur Konstruktion eines Schiefkörpers	14
Konstruktion des Schieftrings SR	20
Erweiterung zum Schiefkörper SK	24
Unendlich viele gemeinsame Punkte einer Geraden und einer C_2	29

III. Reguläre Punkte.

Notwendige Bedingungen für Trägerpunkt	30
Definition und Kennzeichnung der regulären Punkte	31
Hauptsatz über reguläre Punkte	35

IV. Verallgemeinerung von C_2 -Sätzen.

Kommutative Vektoren	37
Die Zuordnung $u = u(X, P_i)$	39
Erzeugung der C_2 vermöge $X = X(u, P_i)$	41
Die Zuordnung $C_2 = C_2(T, P_i)$	43
Hauptsatz über diese Zuordnung	43
Kegelschnittbüschel	46
Desarguesscher Kegelschnitt durch 5 Punkte	48
Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes	49
Eindeutige Festlegung einer Projektivität	51

V. Dualisierung.

Grundlegende Begriffe und Sätze	52
Definition der Tangente einer C_2	53
Tangentenzuordnung	55
Zusammenhang zwischen C_2 und C^2	57

E i n l e i t u n g .

Bei der projektiven Behandlung der Kegelschnitte beschränkt man sich gewöhnlich auf Ebenen, in denen mindestens die folgenden Sätze gültig sind:

- 1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- 2) Zwei verschiedene Geraden besitzen einen gemeinsamen Punkt.
- 3) Es gibt 4 Punkte, von denen je 3 nicht auf einer Geraden liegen.
- 4) Der Satz von PAPPOS.

In dieser Arbeit soll nun außer 1) - 3) lediglich der Satz von DESARGUES vorausgesetzt werden. Die Voraussetzungen 1) - 3) reichen nämlich bereits aus, um den Kegelschnitt nach dem Vorbild STEINERS als Erzeugnis projektiver Büschel zu definieren und die Hinzunahme des Desarguesschen Satzes ermöglicht eine analytische Behandlung mit Hilfe eines Koordinatenkörpers.

Dieser Körper braucht jedoch nicht kommutativ zu sein. Hierdurch ergeben sich nun neue Aspekte.

Das Doppelverhältnis fällt als projektive Koordinate weg. Es läßt sich zwar auch für die Desarguessche Ebene verallgemeinern, doch kann dann

$$DV(P_1P_2P_3P_4) = DV(P_1P_2P_3P_4')$$

gelten, ohne daß $P_4 = P_4'$ ist. Trotzdem ist es auch in einer Desarguesschen Ebene möglich, die Projektivität analytisch darzustellen. Man braucht sie nur zu einer projektiven Kollineation der ganzen Ebene fortzusetzen und die Kollineationsgleichungen speziell auf die projektiven Gebilde anzuwenden. Dies führt zu einer einfachen Parameterdarstellung der Projektivität, die dann auch eine Berechnung des Erzeugnisses gestattet.

Die größere Allgemeinheit der Desarguesschen Ebene zeigt sich besonders deutlich bei der Frage nach dem Durchschnitt einer C_2 und einer Geraden: es können sogar unendlich viele gemeinsame Punkte auftreten. Dies wird an einem Beispiel gezeigt. Es kommt dabei im wesentlichen

nur auf die Konstruktion eines passenden Koordinatenschiefkörpers an. Man kann diese auch als Erweiterung einer gegebenen Pascalschen Ebene zu einer Desarguesschen auffassen. Diese Erweiterung ist allgemein sicher dann möglich, wenn die gegebene Pascalsche Ebene die Körpercharakteristik Null besitzt.

Der Fortfall der Kommutativität gibt weiter Veranlassung zur Einführung des Begriffs "Regulärer Kegelschnittspunkt". Die Gesamtheit der regulären Punkte einer C_2 werden in Abschnitt III analytisch gekennzeichnet. Darauf gelingt der für das folgende grundlegende Nachweis, daß je zwei reguläre Punkte einer C_2 - und nur solche - als "Fundamentaltunkte" gewählt werden können, also als Träger zweier projektiver Büschel, die die gegebene C_2 erzeugen.

In Abschnitt IV wird ein spezielles Verfahren zur Erzeugung einer C_2 entwickelt. Es beruht auf einer "quadratischen" Zuordnung, die eine unmittelbare Anwendung des Desarguesschen Satzes darstellt. Zusammen mit dem Ergebnis von Abschnitt III gestattet es, die Gesamtheit der Kegelschnitte zu kennzeichnen, die 3 gegebene (nicht kollineare) Punkte zu regulären Punkten haben. Unter diesen C_2 lassen sich nun verschiedene Untermannigfaltigkeiten aussondern durch Stellung weiterer Bedingungen. Insbesondere ergeben sich so allgemeinere Sätze über die "Bestimmung einer C_2 aus 5 vorgegebenen Elementen". Unter diesen vorgegebenen Stücken befinden sich jeweils 3 Punkte (oder dual 3 Geraden), von denen verlangt wird, daß sie zu regulären Punkten der C_2 werden. Bemerkenswerterweise kann man hier die verloren gegangene Kommutativität des Grundkörpers durch diese Regularitätsforderung ersetzen. Dies gilt auch bei der folgenden Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes, die zunächst überraschend ist, weil ja in der allgemeinen Desarguesschen Ebene bereits der Satz von Pappos nicht allgemein gültig ist:

"Ist einer C_2 einer Desarguesschen Ebene ein 6-Eck einbeschrieben und ist jede zweite Ecke regulär, so liegen die Schnittpunkte der 3 Paare von Gegenseiten auf einer Geraden."

Abschließend wird die Dualisierung bei Desarguesschen Kegelschnitten behandelt. Da das Dualitätsprinzip auch in der Desarguesschen Ebene gültig ist, kann man die C_2 sowie die dafür angegebenen Sätze dualisieren. Doch bleibt dabei die Frage offen, ob der übliche Zusammenhang zwischen C_2 und C^2 auch in der Desarguesschen Ebene fortbesteht. Insbesondere fragt es sich, was unter einer Tangente einer C_2 zu verstehen ist. Es wird gezeigt, daß der Begriff der Tangente und dual der des Berührungspunktes so verallgemeinert werden können, daß dieser Zusammenhang auch für die Desarguessche Ebene erhalten bleibt.

Zur Terminologie:

Körper	nicht notwendig kommutativ.
Schiefkörper	nicht kommutativ.
Projektive Ebene:	genau dann, wenn 1) - 3) gelten.
Desarguessche Ebene:	projektive Ebene, in der der Satz von Desargues gilt.
Pascalsche Ebene:	projektive Ebene, in der der Satz von Pappos gültig ist.
C_2 :	nicht entartet, wenn nicht das Gegenteil vermerkt ist.

I.

KEGELSCHNITT DER DESARGUESSCHEN EBENE ALS ERZEUGNIS

PROJEKTIVER BUESCHEL.

1) Perspektivität.

Wir nehmen in einer projektiven Ebene Geradenbüschel (g) , (g') mit den Trägern P , P' an sowie eine Gerade a , die weder durch P noch durch P' geht, und ordnen je zwei Geraden g, g' aus (g) bzw. (g') einander zu, die a in ein und demselben Punkt schneiden.

Diese Zuordnung ist umkehrbar eindeutig. Sie werde als eine Perspektivität mit der Achse a bezeichnet.

Zu zwei beliebigen Büscheln (g) , (g') einer projektiven Ebene gibt es mindestens eine Perspektivität. Auf Grund von Axiom 3 kann man nämlich eine Gerade a finden, die durch keinen der Träger hindurchgeht. Jedes solche a ist als Perspektivitätsachse geeignet.

2) Projektivität.

$(g_1), \dots, (g_n)$, $n \geq 2$ seien endlich viele Büschel einer projektiven Ebene und es werde angenommen, daß

$$(g_i) \text{ und } (g_{i+1}) \quad i = 1, \dots, (n-1)$$

perspektiv aufeinander bezogen sind. Dann besteht auch eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Geraden von (g_1) und denen von (g_n) . Eine derartige Zuordnung definieren wir als Projektivität.

3) Definition des Kegelschnitts nach dem Vorbild

STEINERS.

In einer projektiven Ebene seien die verschiedenen Büschel (g) und (g') projektiv aufeinander bezogen. Die Gesamtheit der Punkte P , die je einem Paar zugeordneter Geraden g, g' angehören, definieren wir als Kegelschnitt.

Diese Definition ist in jeder projektiven Ebene mit den Eigenschaften 1) - 3) brauchbar. Sie ergibt speziell den gewöhnlichen Kegelschnitt, wenn die reelle projektive Ebene zugrundegelegt wird.

Eine analytische Darstellung des Kegelschnitts wird möglich, wenn man außer 1) - 3) noch die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes fordert. Dies wird unter 4) - 8) gezeigt.

4) Perspektive Kollineation.

Eine umkehrbar eindeutige Punktabbildung einer projektiven Ebene auf sich selbst werde als Kollineation bezeichnet, wenn die Kollinearität dreier Urpunkte stets gleichbedeutend ist mit der Kollinearität der Bildpunkte.

Läßt eine Kollineation die Punkte einer Geraden fest, so sprechen wir von perspektiver Kollineation. Bei einer von der Identität verschiedenen perspektiven Kollineation ist die Punktreihe der Fixpunkte offenbar eindeutig bestimmt. Sie werde als Achse bezeichnet. Im Falle der Identität lassen wir jede Gerade als Achse gelten. Weiter besitzt eine perspektive Kollineation ein Büschel von Festgeraden. Den Träger eines solchen Büschels nennen wir Zentrum. Dieses ist bei einer von I verschiedenen perspektiven Kollineation eindeutig bestimmt.

Zusammenhang zwischen Perspektivität und perspektiver Kollineation.

Wir gehen aus von einer perspektiven Kollineation PK: Sie bilde das Büschel (g) , dessen Träger P nicht auf der Achse von PK liegt, in (g') ab. Zwischen (g) und (g') besteht dann auch eine Perspektivität, nämlich vermöge der Zuordnung: $g' = PK(g)$. Die perspektive Kollineation ruft hier also eine Perspektivität hervor.

Es ist nun gerade die umgekehrte Frage von Interesse, ob man jede vorgegebene Perspektivität einbetten kann in eine perspektive Kollineation der ganzen Ebene. Dies ist der Fall, wenn die projektive Ebene desarguessch ist.

Sind nämlich (g) und (g') mit den Trägern P, P' perspektiv zugeordnet bezüglich der Achse a , so wähle man auf einer Geraden durch P und P' einen Punkt Z , verschieden von P, P' . Auf Grund des Desarguesschen Satzes existiert nun eine perspektive Kollineation mit Z als Zentrum, a als Achse, die außerdem P in P' überführt. Diese perspektive Kollineation ruft die gegebene Perspektivität hervor.

5) Projektive Kollineation.

Darunter werde wie gewöhnlich das Produkt endlich vieler perspektiver Kollineationen verstanden. Die Definition ist in jeder projektiven Ebene mit den Eigenschaften 1) - 3) möglich. Ebenfalls auf Grund dieser Axiome gilt dann offenbar der Satz, daß eine projektive Kollineation zwischen einem Büschel (g) und dessen Bild (g') eine Projektivität hervorruft.

Setzt man auch den Desarguesschen Satz voraus, so läßt sich auch umgekehrt zu jeder Projektivität eine projektive Kollineation der ganzen Ebene angeben, die die Projektivität hervorruft, wie aus 4) leicht zu folgern. Von dieser Möglichkeit der Fortsetzung einer Projektivität werde wir im folgenden Gebrauch machen, um die Projektivität analytisch darzustellen.

6) Abbildungsgleichungen einer projektiven Kollineation der Desarguesschen Ebene.

Es werde jetzt der Desarguessche Satz vorausgesetzt. Man kann dann in bekannter Weise ein projektives Koordinatensystem einführen (siehe etwa ARTIN: Geometric Algebra). Es entspricht dann jedem Punkt P eine Klasse von nichttrivialen Tripeln (x_0, x_1, x_2) , die sich nur um einen rechtsseitigen Faktor unterscheiden (Rechtsklasse), jeder Geraden g eine Klasse von Tripeln (u_0, u_1, u_2) , die sich nur um einen linksseitigen Faktor unterscheiden (Linksklasse).

Die x_i, u_i sind Elemente eines Körpers. Dieser braucht nicht kommutativ zu sein.

Eine Abbildung der Desarguesschen Ebene auf sich ist nun bekanntlich genau dann eine Kollineation, wenn sie durch eine Transformation

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k^\varphi \quad i, k = 0, 1, 2$$

bei der (a_{ik}) nichtsingulär und $x \rightarrow x^\varphi$ ein Automorphismus des Koordinatenkörpers ist, dargestellt werden kann. Diese Punktabbildung ist verknüpft mit einer Geradenabbildung, die in Geradenkoordinaten u_i durch

$$u_k' = \sum_i u_i^\varphi b_{ik} \quad \text{mit} \quad (b_{ik}) = (a_{ik})^{-1}$$

beschrieben wird.

Die Kollineation ist genau dann projektiv, wenn der Automorphismus $x \rightarrow x^\varphi$ ein innerer ist.

In diesem Fall kann man sogar ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen: $\varphi = \text{Identität}$.

Man braucht ja nur bei

$$x_i' = \sum_k a_{ik} c x_k c^{-1}$$

den Faktor c zur Matrix zu nehmen und noch beiderseits mit c zu multiplizieren.

7) Parameterdarstellung eines Büschels.

Man greife aus dem Büschel (g) zwei verschiedene Geraden g_1, g_2 heraus und wähle für sie Vektoren v_1, v_2 . Diese v_i sollen uns als Vektorbasis für (g) dienen. Wesentlich dabei ist, daß an der einmal getroffenen Wahl der v_i im folgenden festgehalten wird.

Für eine beliebige Gerade g aus (g) mit dem Vektor v definieren wir Parameter in bezug auf die Basis v_i wie folgt:

Man setze $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$,

was wegen der Unabhängigkeit der v_i mit genau einem Paar p_i möglich ist. (p_1, p_2) sei dann ein Parameterpaar für g .

Wählt man für g statt v den Vektor $r \cdot v$ ($r \neq 0$), so bekommt man das Parameterpaar (rp_1, rp_2) . Der Geraden g

ist damit in eindeutiger Weise die "Linksklasse" $r(p_1, p_2)$ zugeordnet.

Umgekehrt entspricht jeder solchen Linksklasse genau ein g aus (g) . Man kann daher (bei festgehaltener Basis v_i !) diese Linksklassen als Büschelkoordinaten von (g) benutzen.

8) Parameterdarstellung einer Projektivität.

Zwischen den Büscheln (g) und (g') bestehe eine Projektivität:

$$g' = p(g) .$$

Um diese analytisch darzustellen, betten wir p in eine projektive Kollineation P ein:

$$p(g) = P(g) \quad \text{für alle } g \text{ aus } (g) .$$

P werde durch die lineare Transformation

$$u'_k = \sum_i u_i b_{ik} \quad (u' = uB)$$

dargestellt. Dies ist dann zugleich eine analytische Fassung der Projektivität p .

Darüber hinaus können wir eine Parameterdarstellung für p angeben: Man führe für (g) eine Vektorbasis v_1, v_2 ein und setze gemäß 7) für den Vektor v einer Büschelgeraden g :

$$v = p_1 v_1 + p_2 v_2 .$$

Diese Gleichung multipliziere man von rechts mit der oben angegebenen Matrix B :

$$vB = p_1 v_1 B + p_2 v_2 B .$$

vB stellt die Gerade $P(g)$, also wegen $P(g) = p(g)$, die Bildgerade g' dar. Für $v_1 B, v_2 B$ setzen wir v_1', v_2' und benutzen diese v_i' als Vektorbasis für das Bildbüschel (g') . In bezug auf diese v_i' hat g' gemäß

$$vB = p_1 v_1' + p_2 v_2'$$

einfach die Parameter p_1, p_2 . Bei Benutzung dieser speziellen Basis v_i' wird also die Projektivität einfach durch die

Parametertransformation: $p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2$ dargestellt.

Gibt man umgekehrt zwei Basissystem v_i, v_i' für (g) bzw. (g') vor und definiert in bezug darauf eine Zuordnung Z durch $p_i' = p_i$, so ist dies eine Projektivität zwischen (g) und (g') . Man kann nämlich eine nichtsinguläre Matrix B mit $v_i' = v_i B$ ($i = 1, 2$) finden und hat dann in

$$v' = vB$$

eine projektive Kollineation, die Z hervorruft.

9) Analytische Darstellung eines Kegelschnitts der
Desarguesschen Ebene.

Die C_2 werde erzeugt durch die Projektivität

$$g' = p(g)$$

zwischen den Büscheln $(g), (g')$ mit den verschiedenen Trägern P, P' .

Nach 8) kann p folgendermaßen analytisch ausgedrückt werden:

Der Geraden g aus (g) mit dem Vektor

$$v = p_1 v_1 + p_2 v_2$$

ist zugeordnet die Gerade g' aus (g') mit dem Vektor

$$v' = p_1 v_1' + p_2 v_2'.$$

Ein Punkt P mit dem Vektor x gehört somit genau dann zur C_2 , wenn mit einem nichttrivialen Paar p_1, p_2 die Gleichungen

$$p_1(v_1 x) + p_2(v_2 x) = 0$$

$$p_1(v_1' x) + p_2(v_2' x) = 0$$

bestehen. Faßt man diese als homogenes System für die p_i auf, so kann man wegen des Vorhandenseins der nichttrivialen Lösung p_i auf eine Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten schließen, die gerade die gesuchte Bedingung für x darstellt.

Um diese Bedingung möglichst einfach zu gestalten, passen wir das Bezugssystem der Projektivität an.

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

$$1) p(PP') \neq PP' :$$

Dann ist auch $p(PP') \neq p^{-1}(PP')$ und der Schnittpunkt $p(PP') \times p^{-1}(PP')$ liegt nicht auf PP' .

Wir wählen dann ein Bezugssystem mit den folgenden Grundpunkten:

$$E_0 = (100) = p(PP') \times p^{-1}(PP')$$

$$E_1 = (010) = P = \text{Träger von } (g)$$

$$E_2 = (001) = P' = \text{ " " } (g') .$$

E_0 erhält man also, indem man zu PP' einmal die entsprechende Gerade aus (g') und dann diejenige aus (g) bestimmt und beide schneidet.

In einem solchen Bezugssystem ist für (g) die folgende Basis möglich:

$$v_1 = (100)$$

$$v_2 = (001) .$$

Gemäß 8) wählen wir für (g') die Basis

$$v_i' = v_i B ,$$

wobei $v' = vB$ also eine projektive Kollineation bedeutet, die p erzeugt.

Die explizite Bestimmung von B ist jedoch nicht nötig.

Da die Koordinatenachse mit $v_1 = (100)$ nach Wahl des Bezugssystems in die Achse $x_1 = 0$ übergeht, hat v_1' die Form $(0a0)$, und aus entsprechendem Grund ist v_2' von der Form $(b00)$.

Setzt man diese v_i, v_i' in die Gleichungen (I) ein, so erhält man für g und dessen Bild g' :

$$g: p_1 x_0 + p_2 x_2 = 0$$

$$g': p_1 a x_1 + p_2 b x_0 = 0 .$$

Ein Punkt $P(x_i)$ gehört genau dann zur C_2 , wenn die x_i diese beiden Gleichungen für ein nichttriviales Paar p_1, p_2 befriedigen. Diese Bedingung erkennt man durch einfache (nicht kommutative!) Rechnung als gleichwertig mit der folgenden:

Ein "eigentlicher" Punkt mit $x_0 \neq 0$ gehört genau dann dem Erzeugnis an, wenn

$$(b^{-1}x_2x_0^{-1})(ax_1x_0^{-1}) = 1$$

und von den uneigentlichen Punkten mit $x_0 = 0$ sind genau die Träger P, P' Kegelschnittspunkte.

Die letzte Gleichung vereinfacht sich durch Einführung der inhomogenen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= ax_1x_0^{-1} \\ y &= b^{-1}x_2x_0^{-1} \end{aligned}$$

zu $yx = 1$.

Umgekehrt stellt die Menge M , bestehend aus den Lösungen von

$$yx = 1$$

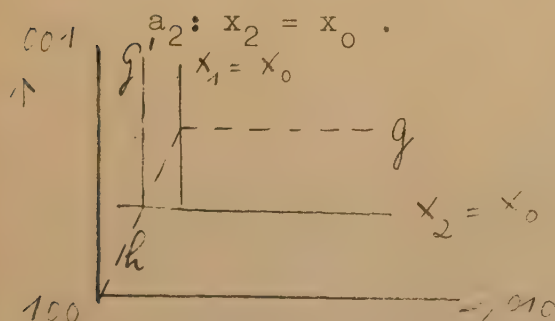
und den Punkten $(010), (001)$

einen Kegelschnitt dar, und zwar bei beliebiger Wahl des Bezugssystems.

Zum Beweise geben wir eine Projektivität P an, die M erzeugt: P bezieht die Büschel (g) und (g') mit den Trägern (010) bzw. (001) aufeinander und ist Produkt der folgenden Perspektivitäten p_1, p_2 :

p_1 hat die Achse $a_1: x_1 = x_0$, und ordnet dem Büschel (g) das Hilfsbüschel (h) mit dem Träger (100) zu,

p_2 verknüpft (h) mit (g') , und zwar vermöge der Achse



Daß diese Projektivität P die Menge M erzeugt, bestätigt man durch einfache Rechnung, wobei das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht benötigt wird.

Damit ist dann auch die Existenz eines "nicht entarteten" Kegelschnitts für jede beliebige Desarguessche Ebene bewiesen.

$$2) \quad p(PP') = PP'.$$

In diesem Fall wählen wir für E_0 einen nicht auf PP' liegenden Punkt der C_2 :

$$E_0 = g \times p(g) \text{ mit } g \text{ aus } (g) \text{ und } \nmid PP'.$$

Im übrigen setzen wir wieder:

$$E_1 = P, \quad E_2 = P'.$$

Für die Koordinatenachsen gelten dann folgende Zuordnungen:

$$p(E_1E_2) = E_1E_2 \quad (1)$$

$$p(E_0E_1) = E_0E_1 \quad (2).$$

Wählt man also für (g) die Vektorbasis

$$v_1 = (100)$$

$$v_2 = (001),$$

so bekommt v_1' auf Grund von (1) die Form:

$$v_1' = (a00)$$

$$v_2' = (0b0).$$

Der Büschelgeraden

$$g \text{ mit } v = p_1v_1 + p_2v_2 = (p_10p_2)$$

ist demnach zugeordnet:

$$g' \text{ mit } v' = p_1v_1' + p_2v_2' = (p_1a, p_2b, 0).$$

Ein Punkt $P(x_1)$ der C_2 , der mit g und g' inzident ist, genügt somit den Gleichungen:

$$p_1x_0 + p_2x_2 = 0 \quad (I').$$

$$p_1ax_0 + p_2bx_1 = 0$$

Diese werden durch die uneigentlichen Punkte mit $x_0 = 0$ zusammen mit dem Parameterwert $p_2 = 0$ befriedigt. Ist für einen Kegelschnittpunkt jedoch $x_0 \neq 0$, so folgt:

$$p_1 = -p_2x_2x_0^{-1}$$

und wenn man dies in die zweite Gleichung einsetzt:

$$p_2x_2x_0^{-1}ax_0 = p_2bx_1.$$

Hier ist $p_2 \neq 0$, da andernfalls aus (I') auch $p_1 = 0$ folgte.

Die letzte Gleichung ist demnach äquivalent mit

$$x_2 x_0^{-1} a = b x_1 x_0^{-1} .$$

Führt man noch die inhomogenen Koordinaten

$$x = b x_1 x_0^{-1}$$

$$y = a x_2 x_0^{-1}$$

ein, so erhält man

$$a^{-1} y a = x \quad \text{oder}$$

$$y = a x a^{-1} .$$

Der Kegelschnitt ist in diesem Falle "entartet": er besteht aus der Geraden $x_0 = 0$ und dem "Ast"

$$y = x^\varphi$$

wobei $x \rightarrow x^\varphi$ ein innerer Automorphismus des Koordinatenkörpers.

Umgekehrt kann man zu jeder Punktmannigfaltigkeit M , bestehend aus den Punkten mit

$$x_0 = 0$$

$$\text{und} \quad y = x^\varphi$$

bei beliebig vorgegebenem innereren Automorphismus $x \rightarrow x^\varphi$ eine Projektivität angeben, die M als Erzeugnis hat. Eine solche wird z.B. hervorgerufen durch die projektive Kollineation

$$x_0'^\varphi = x_0$$

$$x_1'^\varphi = x_2$$

$$x_2'^\varphi = x_1 .$$

Zusammenfassung:

Die Voraussetzungen der Desarguesschen Ebene reichen aus, um die Projektivität und die C_2 analytisch darzustellen. Es ist hierfür der sog. klassische Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, der axiomatisch gleichwertig ist mit dem **Satz** von Pappos (zusammen mit 1) - 3)!) nicht erforderlich, ebensowenig das in der klassischen Theorie viel verwendete Doppelverhältnis.

II.

KONSTRUKTION EINER SPEZIELLEN DESARGUESSCHEN EBENE.

Wir gehen von der folgenden Frage aus:

Auf einer Desarguesschen C_2 , dargestellt durch $xy = 1$, wird ein Punkt $P(x_0, y_0)$ angenommen und durch ihn die Gerade

$$h: y - y_0 = -1/x_0^2 (x - x_0)$$

gelegt. Welche Punkte haben h und die C_2 gemeinsam?

Die Antwort hängt von der Wahl der Ebene sowie des Punktes P ab:

Ist die Ebene kommutativ - gilt in ihr auch der Satz des Pappos -, so ist P der einzige gemeinsame Punkt.

Dagegen kann man unter den allgemeinen Desarguesschen Ebenen eine solche finden, in der g und die C_2 bei geeigneter Wahl von $P(x_0, y_0)$ sogar unendlich viele gemeinsame Punkte besitzen.

Der Beweis hierfür wird im folgenden erbracht. Das Kernstück ist dabei die Konstruktion eines speziellen Schiefkörpers, der dann zum Koordinatenkörper einer Desarguesschen Ebene gemacht wird.

1) Eine Schnittpunktbedingung.

Satz: Durch einen Punkt $P(x_0, y_0)$ der $C_2: xy = 1$ wird eine Gerade

$$g: y - y_0 = m(x - x_0) \text{ mit } m \neq 0$$

gelegt. Ein Punkt Q auf g , verschieden von P , liegt genau dann auch auf der C_2 , wenn für $z = (x - x_0)^{-1}$ die Gleichung

$$z(x_0 m)^{-1} + x_0 z + 1 = 0$$

gilt.

In II brauchen wir den Satz nur für den Spezialwert $m = -1/x_0^2$, später dann auch für $m \neq -1/x_0^2$.

Zum Beweise des Satzes nehmen wir zuerst an, Q liegt auch auf der C_2 . Dann ist $y = 1/x$. Als Punkt von g genügt Q ferner der Gleichung

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Aus beiden Gleichungen folgt für x die notwendige Bedingung:

$$1/x - 1/x_0 = m(x - x_0).$$

Ohne das kommutative Gesetz zu benutzen formen wir nun um:

Zur Beseitigung der Nenner multiplizieren wir von links mit x_0 , von rechts mit x :

$$-(x - x_0) = x_0 m(x - x_0)x.$$

Hierin setzen wir $x - x_0 = w$ ($w \neq 0$, da $Q \neq P$ und auf $g!$).

Es ergibt sich:

$$-w = x_0 m w (w + x_0).$$

Dies multiplizieren wir von links mit $(x_0 m)^{-1}$:

$$-(x_0 m)^{-1} w = w^2 + w x_0.$$

Schließlich multiplizieren wir noch von links und von rechts mit w^{-1} . Man erhält:

$$-w^{-1} (x_0 m)^{-1} = 1 + x_0 w^{-1}$$

oder mit $z = w^{-1} = (x - x_0)^{-1}$:

$$z(x_0 m)^{-1} + x_0 z + 1 = 0. \quad (1)$$

Dies ist die Gleichung unseres Satzes. Sie ist notwendig dafür, daß $Q(xy)$ auch auf der C_2 liegt.

Man überzeugt sich leicht, daß sie auch hinreichend ist, womit dann der Beweis beendet ist.

Wir behandeln jetzt den

$$\text{Spezialfall } m = -1/x_0^2 :$$

Gleichung (1) geht dann über in

$$z x_0 - x_0 z = 1 \quad (1')$$

Ist hier x_0 aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers, so hat (1') in diesem Körper keine Lösung z . Insbesondere

ist die Gleichung für keine Wahl von x_0 lösbar, wenn in der Desarguesschen Ebene auch der Satz von Pappos gültig ist. g hat dann nur den Punkt P mit der C_2 gemeinsam.

Gleichung (1') gibt uns aber die Frage auf, ob es einen Schiefkörper gibt, in dem sie lösbar ist.

Dies ist der Fall. Zum Beweise beschränken wir uns auf die Konstruktion eines möglichst einfachen derartigen Schiefkörpers SK mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Er enthält ein Paar, a, b mit $ba - ab = 1$,
- 2) er enthält einen zu $K(1)$ isomorphen Körper,
- 3) er ist minimal.

2) Konstruktion des Schiefkörpers SK.

Diese Konstruktion nehmen wir in zwei Schritten vor:

- A) Konstruktion eines nullteilerfreien Schieftrings mit den Eigenschaften 1-3,
- B) Erweiterung dieses Schieftrings zum Schiefkörper.

Auf diese Einteilung führt die folgende Ueberlegung:

Wenn überhaupt ein SK mit 1-3 existiert, so enthält er auch einen Schieftring SR, bestehend aus den "Polynomen"

$$\sum c_{i_1 k_1 \dots i_n k_n} a^{i_1} b^{k_1} \dots a^{i_n} b^{k_n}$$

mit rationalen Koeffizienten, deren jedes aus a, b und endlich vielen rationalen Zahlen durch Anwendung der Ringoperationen in endlicher Folge hervorgeht. Dieser SR erfüllt ebenfalls 1-3 und ist 4. nullteilerfrei.

A) Konstruktion von SR.

Um herauszufinden, wie SR konstruiert werden kann, stellen wir in a) eine Strukturanalyse voran. Wir gehen dabei von der Annahme aus, daß ein SR mit den Eigenschaften 1-4 existiert. Indem wir daraus Folgerungen ziehen, werden wir für SR eine bestimmte Struktur als die einzig in Be-

tracht kommende erhalten. SR ist also jedenfalls bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die Existenz von SR wird anschließend bewiesen durch Konstruktion eines Schieftrings gemäß der bei a) gefundenen Struktur.

a) Strukturanalyse.

1. Die 1 aus $K(1)$ ist Einselement für den ganzen Ring SR (sogar für den ganzen SK!).

Mit beliebigem c aus SR gilt nämlich:

$$c.1 = c.(1.1) = (c.1).1, \text{ also:}$$

$$c.1 - (c.1).1 = 0, \text{ oder:}$$

$$(c - c.1).1 = 0.$$

Da SR nullteilerfrei ist, folgt hieraus $c.1 = c$.

Entsprechend zeigt man $1.c = c$.

2. Für jedes c aus SR und jedes rationale r ist

$$c.r = rc.$$

Dies ist in einfacher Weise aus 1. zu folgern.

3. Es ist:

$$ba^n = a^n b + na^{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Hierbei ist die Potenz a^n in üblicher Weise zu verstehen, insbesondere soll $a^0 = 1$ sein.

Den Beweis erbringt man leicht durch vollständige Induktion nach n . Die Formel ist richtig für $n = 1$. Sie sei als richtig erkannt für ein gewisses natürliches n , dann gilt sie auch für $(n+1)$, denn:

$$\begin{aligned} ba^{n+1} &= (ba^n)a = (a^n b + na^{n-1})a = a^n ba + na^n = \\ &= a^n(ab+1) + na^n = a^{n+1}b + (n+1)a^n. \end{aligned}$$

4. Es sei $f(a) = \sum_{i=0}^n c_i a^i$ mit rationalen c_i und unter

$$f'(a) \text{ werde } \sum_{i=1}^n i c_i a^{i-1} \text{ verstanden.}$$

Dann gilt:

$$\underline{b.f(a) = f(a).b + f'(a)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} bf(a) &= b \sum_{i=0}^{\infty} c_i a^i = bc_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i ba^i = \\ &= c_0 b + \sum_{i=1}^{\infty} c_i (a^i b + ia^{i-1}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i a^i \right) b + \sum_{i=1}^{\infty} i c_i a^{i-1} = \\ &= f(a)b + f'(a), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

5. $f(a,b)$ bezeichne ein in bezug auf a, b geordnetes Polynom von der Gestalt

$$\sum c_{ik} a^i b^k$$

mit rationalen c_{ik} , und $f'_a(a,b)$ sei definiert als das geordnete Polynom

$$\sum_{i \geq 1} i c_{ik} a^{i-1} b^k.$$

Dann gilt:

$$\underline{b \cdot f(a,b) = f(a,b) \cdot b + f'_a(a,b)}.$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie bei 4.

6. Für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt:

$$\underline{b^n f(a,b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_a^{(k)} b^{n-k}}.$$

Dabei soll $f^{(0)} = f$ sein, und für $k \geq 1$ sei $f_a^{(k)}$ definiert durch:

$$f_a^{(k+1)} = (f_a^{(k)})'_a.$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach n . Für $n = 0, 1$ ist die Formel offenbar gültig. Wir nehmen an, daß sie für ein gewisses natürliches n richtig ist und beweisen, daß sie dann auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned} b^{n+1} f(a,b) &= b(b^n f(a,b)) = b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_a^{(k)} b^{n-k} \right) = \\ &= \binom{n}{0} f b^{n+1} + \binom{n}{1} f'_a b^n + \dots + \binom{n}{n} f_a^{(n)} b \\ &\quad + \binom{n}{0} f'_a b^n + \dots + \binom{n}{n-1} f_a^{(n)} b + \binom{n}{n} f_a^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f_a^{(k)} b^{(n+1-k)}, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

7. Setzt man in Formel 6) speziell $f(a,b) = a^m$, so erhält man:

$$b^n a^m = a^m b^n + \frac{1}{1!} \frac{d(a^m)}{da} n b^{n-1} + \frac{1}{2!} \frac{d^2(a^m)}{da^2} n(n-1) b^{n-2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{d^n(a^m)}{da^n} n! b^0,$$

also:

$$b^n a^m = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k(a^m)}{da^k} \frac{d^k(b^n)}{db^k}$$

Hiernach kann man das ungeordnete Potenzprodukt $b^n a^m$ überführen in eine Summe geordneter Potenzprodukte.

8. Aus 7) folgt speziell für $m = 1$:

$$b^n a = ab^n + nb^{n-1}.$$

Hieraus leitet man für $g(b) = \sum d_n b^n$ mit rationalen d_n ab:

$$\underline{g(b)a = ag(b) + g'(b)}.$$

9. Algebraische Unabhängigkeit der a, b .

Für die Aufdeckung der Struktur von SR sind besonders wichtig die folgenden Sätze:

Satz 9,1:

a ist transzendent in bezug auf $K(1)$:

Eine Gleichung

$$\sum_{i=0}^n c_i a^i = 0 \quad \text{mit rationalen } c_i$$

hat zur Folge, daß sämtliche $c_i = 0$ sind.

Beweis: Die linke Seite werde durch $f(a)$ abgekürzt und die Gleichung von links mit b multipliziert:

$$b \cdot f = 0.$$

Nach 4) folgt: $f(a)b + f'(a) = 0$.

Mit $f(a)$ ist also auch $f'(a)$ gleich Null. Wiederholung dieser Schlußweise ergibt, daß sämtliche Ableitungen = 0.

Hieraus folgt, daß sämtliche $c_i = 0$ sind. Nimmt man nämlich das Gegenteil an, so gibt es einen Index m so, daß

$$c_m \neq 0 \text{ und } c_i = 0 \text{ für } i > m.$$

Mit diesem m bilde man:

$$f^{(m)} = m! c_m.$$

Die linke Seite ist 0, die rechte aber nicht, wenn wie in unserem Falle die Charakteristik 0 vorausgesetzt wird. Die Annahme $c_m \neq 0$ ist dann also unhaltbar.

Satz 9,2:

b ist transzendent in bezug auf $K(1)$.

Zum Beweise nehmen wir an

$$g(b) = \sum_{i=0}^n d_i b^i = 0 \text{ mit rationalen } d_i,$$

und multiplizieren diese Gleichung von rechts mit a :

$$g(b)a = 0.$$

Nach 8) folgt:

$$ag(b) + g'(b) = 0, \text{ also wegen } g(b) = 0 \\ g'(b) = 0.$$

Im übrigen kann man wie beim letzten Beweis schließen.

Satz 9,3:

Aus $\sum_{i,k} c_{ik} a^i b^k = 0$ und c_{ik} rational

folgt $c_{ik} = 0$ stets.

Beweis:

Wir kürzen die linke Seite mit $f(a,b)$ ab und multiplizieren die Gleichung von links mit b :

$$bf(a,b) = 0.$$

Nach 5) folgt:

$$f(a,b)b + f'_a(a,b) = 0, \text{ zusammen}$$

mit $f(a,b) = 0$ also $f'_a(a,b) = 0.$

So fortfahrend erkennt man:

$$f_a^{(n)} = 0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Den Beweis führen wir nun indirekt zu Ende: Angenommen, nicht sämtliche c_{ik} sind Null. Dann können wir einen Index m finden, so, daß unter den Koeffizienten

$$c_{mk} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

wenigstens einer $\neq 0$ ist, während sämtliche c_{ik} mit $i > m$ verschwinden.

$f(a, b)$ kann dann in der Form

$$a^m h_m(b) + a^{m-1} h_{m-1}(b) + \dots + h_0(b)$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten von $h_m(b)$ nicht sämtlich Null.

Diese Darstellung ergibt:

$$f_a^{(m)} = m! h_m(b) .$$

Wegen $f_a^{(m)} = 0$ und $m! \neq 0$ (Charakteristik Null!)

folgt:

$$h_m(b) = 0 .$$

Auf Grund von Satz 9,2 sind dann sogar sämtliche Koeffizienten von $h_m(b)$ gleich Null. Widerspruch!

Damit ist der Satz bewiesen.

10. Die Normaldarstellung.

Wendet man bei der Multiplikation in SR von Anfang an auf jedes ba -Produkt die Gleichung

$$ba = ab + 1$$

an, so erhält man nur Produkte, die in bezug auf a, b geordnet sind. Jedes Element von SR ist demnach darstellbar durch ein geordnetes "Polynom"

$$\sum c_{ik} a^i b^k$$

mit rationalen c_{ik} .

Diese Darstellung als geordnetes Polynom ist eindeutig. Hat man nämlich für ein und dasselbe Element c

$$c = \sum c_{ik} a^i b^k, \quad c = \sum d_{ik} a^i b^k,$$

so ist $\sum (c_{ik} - d_{ik}) a^i b^k = 0,$

was nach Satz 9,3 nur möglich ist, wenn allemale $c_{ik} = d_{ik}$.

11. Multiplikationsformel.

f, g seien durch ihre Normaldarstellungen

$$f = \sum c_{ik} a^i b^k$$

$$g = \sum d_{rs} a^r b^s$$

gegeben. Nach 10) gibt es auch für das Produkt f.g eine Normaldarstellung. Diese wollen wir nun bestimmen.

Wir multiplizieren zuerst distributiv aus:

$$f.g = \sum_{i,k,r,s} c_{ik} d_{rs} a^i b^k a^r b^s.$$

Hierin ersetzen wir das ungeordnete Potenzprodukt $b^k a^r$ gemäß 7) durch

$$\sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n(a^r)}{da^n} \frac{d^n(b^k)}{db^n}.$$

Nehmen wir noch die Summe über n nach vorne, so bekommen wir:

$$f.g = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\sum_{i,k,r,s} c_{ik} d_{rs} a^i \frac{d^n(a^r)}{da^n} \frac{d^n(b^k)}{db^n} b^s \right).$$

Die innere Summe hat eine einfache Bedeutung:

Der 1., 3., und 5. Faktor bilden zusammen das allgemeine Glied von $f_b^{(n)}$, die übrigen Faktoren das allgemeine Glied von $g_a^{(n)}$. Im übrigen ist in dieser Summe jedes Glied von $f_b^{(n)}$ mit jedem Glied von $g_a^{(n)}$ kombiniert, wobei immer die a-Faktoren vorangehen.

Um dies bequem ausdrücken zu können, definieren wir:

Unter dem "Normalprodukt" $p \times q$ der Elemente

$$p = \sum p_{ik} a^i b^k, \quad q = \sum q_{ik} a^i b^k$$

werde das geordnete Polynom $\sum e_{ik} a^i b^k$ verstanden, dessen e_{ik} bestimmt sind durch

$$\sum e_{ik} x^i y^k = \left(\sum p_{ik} x^i y^k \right) \left(\sum q_{ik} x^i y^k \right)$$

mit x, y als gewöhnlichen Unbestimmten.

$p \times q$ erhält man also, indem man zuerst "normal" ausmultipliziert und dann in jedem Potenzprodukt die a-Faktoren vorausstellt.

Mit diesem Normalprodukt ergibt sich schließlich:

$$f \cdot g = \sum_n \frac{1}{n!} \times f_b^{(n)} \times g_a^{(n)} .$$

12. Strukturbestimmung.

Nach 10) kann man die Elemente von SR umkehrbar eindeutig zuordnen den gewöhnlichen Polynomen $\sum c_{ik} x^i y^k$ mit rationalen Koeffizienten:

$$f(a,b) \leftrightarrow f(x,y) .$$

Diese Zuordnung ist offenbar bezüglich der Addition ein Isomorphismus.

Dieser kann auch auf die Multiplikation ausgedehnt werden, indem man für die gewöhnlichen Polynome $f(x,y)$ neben dem üblichen Produkt $f \times g$ noch das folgende definiert

$$f \cdot g = \sum_n \frac{1}{n!} \times f_y^{(n)} \times g_x^{(n)} ,$$

also gerade nach dem Muster der Multiplikationsregel 11.

Mit diesen Verknüpfungen bilden die gewöhnlichen Polynome $f(x,y)$ eine gewisse algebraische Struktur S.

Diese allein kommt für SR in Betracht.

Ergebnis:

SR ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

b) Konstruktion von SR.

Wir wollen nun beweisen, daß die gefundene algebraische Struktur S auch tatsächlich einen Ring mit den Eigenschaften 1-4 bildet. Damit wird die Existenz von SR nachgewiesen.

Um bei diesem Existenzbeweis die logische Unabhängigkeit von den Hypothesen der Strukturanalyse klar hervortreten zu lassen, bauen wir S neu auf, vermöge der folgenden

Definitionen:

- 1) Elemente von S sind die Polynome $f(x,y)$ mit rationalen Koeffizienten.
- 2) Für diese gelten die üblichen Vereinbarungen der Gleichheit und der Addition.

3) Das Produkt $f \cdot g$ erklären wir durch:

$$f \cdot g = \sum_n \frac{1}{n!} x f_y^{(n)} \times g_x^{(n)},$$

wobei $f \times g$ das gewöhnliche Produkt von f, g bedeutet.

Bemerkung:

Gemäß der gegebenen Gleichheitsdefinition ist beispielsweise $xy^2 = y^2x$, wenn beidemale das fertige Polynom gemeint ist.

Nach 3) ist auch noch $x \cdot y^2 = xy^2$, dagegen nicht mehr $y^2 \cdot x = y^2x$, wenn rechts wieder das fertige Polynom gemeint ist.

Wir beweisen nun, daß S ein Ring ist.

Die Gesetze der Gleichheit und der Addition (Subtraktion) sind offensichtlich erfüllt.

Wir prüfen, ob auch die Multiplikationsgesetze eines Rings gelten:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(g+h) &= \sum \frac{1}{n!} x f_y^{(n)} \times (g+h)_x^{(n)} = \sum \frac{1}{n!} x f_y^{(n)} \times (g_x^{(n)} + h_x^{(n)}) = \\ &= \sum \frac{1}{n!} x f_y^{(n)} \times g_x^{(n)} + \sum \frac{1}{n!} x f_y^{(n)} \times h_x^{(n)} \\ &= \underline{fg + fh}. \end{aligned}$$

b) Entsprechend zeigt man: $(f+g)h = fh + gh$.

c) Zum Nachweis des assoziativen Gesetzes berechnen wir zuerst $f(gh)$, dann $(fg)h$ und vergleichen schließlich.

$$\begin{aligned} f(y^h) &= f\left(\sum_v \frac{1}{v!} \frac{\partial^v g}{\partial y^v} \times \frac{\partial^v h}{\partial x^v}\right) = \\ &= \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda} \times \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} \left\{ \sum_v \frac{1}{v!} \frac{\partial^v g}{\partial y^v} \times \frac{\partial^v h}{\partial x^v} \right\} = \\ &= \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda} \times \sum_v \frac{1}{v!} \sum_{\sigma=0}^\lambda \frac{\partial^{v+\lambda-\sigma} g}{\partial y^{v+\lambda-\sigma}} \times \frac{\partial^{v+\sigma} h}{\partial x^{v+\sigma}} \\ (1) \quad &= \sum_{v, \lambda, \sigma} \frac{1}{\lambda!} \frac{1}{v!} \binom{\lambda}{\sigma} \frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda} \times \frac{\partial^{v+\lambda-\sigma} g}{\partial y^{v+\lambda-\sigma}} \times \frac{\partial^{v+\sigma} h}{\partial x^{v+\sigma}} \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
 (fg)h &= \left(\sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{\nu} f}{\partial y^{\nu}} \times \frac{\partial^{\nu} g}{\partial x^{\nu}} \right) h = \\
 &= \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^{\lambda}}{\partial y^{\lambda}} \left(\sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{\nu} f}{\partial y^{\nu}} \times \frac{\partial^{\nu} g}{\partial x^{\nu}} \right) \times \frac{\partial^{\lambda} h}{\partial x^{\lambda}} = \\
 &= \sum_{\nu, \lambda} \frac{1}{\lambda!} \frac{1}{\nu!} \sum_{\sigma=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\sigma} \frac{\partial^{\nu+\sigma} f}{\partial y^{\nu+\sigma}} \times \frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial x^{\nu} \partial y^{\lambda-\sigma}} \times \frac{\partial^{\lambda} h}{\partial x^{\lambda}} \\
 (1') &= \sum_{\lambda, \nu, \sigma} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\lambda!} \binom{\lambda}{\sigma} \frac{\partial^{\nu+\sigma} f}{\partial y^{\nu+\sigma}} \times \frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial x^{\nu} \partial y^{\lambda-\sigma}} \times \frac{\partial^{\lambda} h}{\partial x^{\lambda}}
 \end{aligned}$$

Um die Uebereinstimmung von (1) und (1') zu erkennen, führe man in (1') neue Summationsindizes ein:

$$\bar{\sigma} = \sigma, \quad \bar{\lambda} = \nu + \sigma, \quad \bar{\nu} = \lambda - \sigma$$

Zwischen den bisherigen Tripeln λ, ν, σ mit $\sigma \leq \lambda$ und den neuen Tripeln mit $\bar{\sigma} \leq \bar{\lambda}$ besteht offenbar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Man kann daher (1') ersetzen durch:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\sigma}} \frac{1}{(\bar{\lambda} - \bar{\sigma})!} \frac{1}{(\bar{\nu} + \bar{\sigma})!} \binom{\bar{\nu} + \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^{\bar{\lambda}} f}{\partial y^{\bar{\lambda}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu} + \bar{\lambda} - \bar{\sigma}} g}{\partial x^{\bar{\lambda} - \bar{\sigma}} \partial y^{\bar{\nu}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu}} h}{\partial x^{\bar{\nu}}} \\
 &= \sum_{\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\sigma}} \frac{1}{\bar{\lambda}!} \frac{1}{\bar{\nu}!} \binom{\bar{\lambda}}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^{\bar{\lambda}} f}{\partial y^{\bar{\lambda}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu} + \bar{\lambda} - \bar{\sigma}} g}{\partial y^{\bar{\nu}} \partial x^{\bar{\lambda} - \bar{\sigma}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu} + \bar{\sigma}} h}{\partial x^{\bar{\nu} + \bar{\sigma}}}
 \end{aligned}$$

Dies stimmt aber mit (1) überein, q.e.d.

S ist also tatsächlich ein Ring.

Wir haben weiter nachzuweisen die

Eigenschaften 1-4:

1) Es gibt in S Elemente a, b mit $ba - ab = 1$:

Dieser Bedingung genügen z.B. die Elemente x, y .

Zum Beweise setzen wir:

$$f(x,y) = y \quad \text{und} \quad g(x,y) = x$$

und berechnen gemäß der Produktdefinition $f.g$:

$f'_y = 1, \quad g'_x = 1$ und alle höheren Ableitungen verschwinden.

$$\text{Es ist also: } f.g = \sum \frac{1}{n!} f_y^{(n)} g_x^{(n)} = y.x + 1$$

d.h. $y.x = xy + 1$, wobei die rechte Seite als fertiges Polynom zu verstehen ist.

Entsprechend findet man nach der Produktdefinition:

$$x.y = xy.$$

Es folgt: $x.y - x.y = 1$, w.z.b.w.

2) Der konstruierte Ring enthält einen zu $K(1)$ isomorphen Körper. Dieser besteht aus den "konstanten" Polynomen mit $c_{ik} = 0$ für $i+k > 0$.

3) Die Elemente x, y erzeugen zusammen mit $K(1)$ den ganzen Ring.

Nach der Produktdefinition kann man nämlich das Element

$$\sum_{i,k} c_{ik} x^i y^k$$

erhalten als echtes Polynom der speziellen Elemente x, y , und zwar gilt:

$$\sum_{i,k} c_{ik} x^i . y^k = \sum_{i,k} c_{ik} x^i y^k$$

Hierbei hat man sich links z.B. auch die Potenz x^i als echte Potenz des Elements x zu denken.

Nimmt man also ein Polynom $f(x,y)$ aus S stets in geordneter Form an, so kann man es auch als echtes Polynom der speziellen Polynome x, y betrachten.

Es ist daher zweckmäßig, sich auf geordnete Polynome $f(x,y)$ zu beschränken.

4) Zum Beweise der Nullteilerfreiheit nehmen wir von Null

verschiedene f, g an mit

$$f = \sum c_{ik} x^i y^k$$

$$g = \sum d_{rs} x^r y^s .$$

Da nicht sämtliche $c_{ik} = 0$, können wir einen Index I finden mit:

$$c_{Ik} \neq 0 \text{ wenigstens für ein } k,$$

$$c_{ik} = 0 \text{ für } i > I \text{ und beliebiges } k.$$

Ferner bestimmen wir K so, daß $c_{IK} \neq 0$ und $c_{IK} = 0$ für $k > K$.

In entsprechender Weise definieren wir für $g(x, y)$ den Koeffizienten d_{RS} .

Multipliziert man nun nach

$$f \cdot g = \sum \frac{1}{n!} \times f_y^{(n)} \times g_x^{(n)}$$

aus, so erhält man rechts in dem Normalprodukt $f \cdot g$ insbesondere das Glied

$$c_{IK} d_{RS} x^{I+R} y^{K+S} ,$$

dessen Koeffizient $\neq 0$ ist.

Dieses Potenzprodukt kommt in $f \cdot g$ nur einmal vor, in den nachfolgenden Summanden $f_y^{(n)} \wedge g_x^{(n)}$ überhaupt nicht mehr, wegen des Auftretens der partiellen Ableitung $g_x^{(n)}$ ($n > 1$).

Es ist daher auch $f \cdot g \neq 0$, q.e.d.

Der konstruierte Ring S besitzt also die Eigenschaften 1-4. Wir können daher setzen $SR = S$.

Damit ist die Existenz des Schieftrings SR bewiesen.

B) Erweiterung von SR zum Schiefkörper.

Hierfür ist grundlegend der

Satz: Zu beliebig vorgegebenen Elementen f, g aus SR gibt es ein nichttriviales Paar x, y aus SR mit:

$$f \cdot x = g \cdot y .$$

Beweis: Es sei: $f = \sum c_{ik} a^i b^k$, $g = \sum d_{rs} a^r b^s$

wobei a, b wie früher die Erzeugenden von SR bedeuten.
Es sei weiter N eine obere Schranke für die Exponenten:

$$i, k, r, s \leq N.$$

Wir denken uns dann bei f, g alle Potenzprodukte mit Exponenten kleiner gleich N angeschrieben, die zuerst noch nicht vorhandenen, mit Koeffizienten Null:

$$f = \sum_{i,k}^N c_{ik} a^i b^k$$

$$g = \sum_{r,s}^N d_{rs} a^r b^s.$$

In entsprechender Form setzen wir die unbekannten Elemente x, y an:

$$x = \sum_{i,k}^M x_{ik} a^i b^k$$

$$y = \sum_{r,s}^M y_{rs} a^r b^s.$$

Ueber M werden wir später in geeigneter Weise verfügen.

Multipliziert man nun mit diesen Polynomen $fx - gy$ aus, so erhält man schließlich ein geordnetes Polynom

$$\sum_{i,k} e_{ik} a^i b^k.$$

Dieses soll Null werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die sämtlichen $e_{ik} = 0$ sind.

Jedes e_{ik} ist nun offenbar linear und homogen in bezug auf die unbekannten Koeffizienten x_{ik}, y_{rs} . Denn beispielsweise ist

$$fx = \sum \frac{1}{n!} f_b^{(n)} x_a^{(n)}$$

und hier sind bei jedem einzelnen Normalprodukt der rechten Seite die Koeffizienten linear und homogen in bezug auf die x_{ik} . Entsprechend sind bei gy die Koeffizienten linear und homogen in bezug auf die y_{rs} .

Die Bedingung $e_{ik} = 0$ stellt demnach für die Unbekannten ein lineares homogenes Gleichungssystem dar. Es ist sicher dann nichttrivial lösbar, wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen besitzt.

Die Anzahl der Unbekannten ist nun $2(M+1)^2$, denn bei x durchlaufen die i, k , und bei y die r, s unabhängig die Zahlen $0, 1, \dots, M$.

Die Anzahl der Gleichungen ist $(N+M+1)^2$, denn $fx - gy$ hat in bezug auf a wie auf b den formalen Grad $N+M$, so daß bei e_{ik} die Indizes i, k unabhängig voneinander die Werte $0, 1, \dots, N+M$ annehmen.

Nun ist aber für genügend großes M :

$$2(M+1)^2 > (n+M+1)^2.$$

Man braucht also nur bei x, y die Schranke M groß genug zu wählen und hat dann mehr Unbekannte als Gleichungen und damit eine nichttriviale Lösung x, y , q.e.d.

Auf Grund des letzten Satzes und der Nullteilerfreiheit von SR gelingt die Erweiterung zum Schiefkörper durch

Einführung von Brüchen.

Definition des Bruchs:

Für die geordneten Zahlenpaare a/b (a, b aus SR , $b \neq 0$) definiere man eine Gleichheit:

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 \text{ genau dann, wenn in}$$

SR x, y ($\neq 0, 0$) vorhanden mit

$$a_1 x = a_2 y, \quad b_1 x = b_2 y.$$

Diese Gleichheit ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Man bilde in der Menge der Paare a/b ($b \neq 0$) die zugehörigen Restklassen. Jede solche Restklasse definieren wir als einen Bruch.

Für diese Brüche kann man Verknüpfungen vestsetzen:

1) $A_1 + A_2$:

Man wähle aus A_1 einen Repräsentanten a_1/b_1
 " " " A_2 " " a_2/b_2

und bestimme r_1, r_2 aus SR so, daß

$$b_1 r_1 = b_2 r_2.$$

Die eindeutig bestimmte Restklasse, in der

$$(a_1 r_1 + a_2 r_2)/b_1 r_1$$

liegt, definieren wir als Summe $A_1 + A_2$.

Die Definition ist sinnvoll: $A_1 + A_2$ ist durch die Restklassen A_i allein bestimmt, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten a_i/b_i sowie des Hilfspaares r_1, r_2 .

2) $A_1 \cdot A_2$:

Es seien $a_1/b_1, a_2/b_2$ Repräsentanten für A_1, A_2 und r, s aus SR so gewählt, daß

$$b_1 r = a_2 s .$$

Diejenige Restklasse, der

$$a_1 r / b_2 s$$

angehört, definieren wir als Produkt $A_1 \cdot A_2$.

Auch hier besteht Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten a_i/b_i und des Hilfspaares r, s .

Mit diesen Verknüpfungen bilden die Brüche einen Körper.

Zu beweisen ist dies auf Grund der Ringeigenschaft von SR , der Nullteilerfreiheit sowie unter ausgiebiger Benutzung des Satzes auf S. 24.

Dieser Körper erfüllt nun gerade unsere Forderungen 1-3:

Die Eigenschaften 1 und 2 kommen nämlich bereits dem Schieferring SR' zu, der bei der folgenden Zuordnung von SR in SK als isomorphes Bild von SR auftritt:

a aus SR wird abgebildet in diejenige Restklasse A
aus SK , die ar/r (r aus $SR - 0$)
enthält.

Schließlich erkennt man auch leicht, daß die Erweiterung SK minimal ist:

Ist nämlich ZK ein Zwischenkörper mit $SR' < ZK < SK$, so enthält dieser mindestens die Lösungen x der Gleichungen $xb = a$ (a, b aus SR' , $b \neq 0$). Diese Lösungen machen aber bereits den ganzen SK aus.

Damit ist die Existenz eines Schiefkörpers mit den Eigenschaften 1-3 bewiesen.

Schließlich kann man durch Betrachtung der Gleichungen

$xb = a$ (a, b aus SR , $b \neq 0$) auch leicht zeigen, daß SK bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Zusammenfassend können wir also feststellen:

Es gibt einen Schiefkörper mit den Eigenschaften 1-3
und dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

$$\text{Gemeinsame Punkte von } g: \quad y - x_0^{-1} = -1/x_0^2 (x - x_0)$$

$$\text{und der } C_2: \quad xy = 1.$$

Wie auf S. 12 gezeigt wurde, ist $Q(x, y) \neq P(x_0, x_0^{-1})$ genau dann gemeinsamer Punkt von g und der C_2 , wenn $z = (x - x_0)^{-1}$ der folgenden Gleichung genügt:

$$zx_0 - x_0z = 1. \quad (1)$$

Wir sind jetzt in der Lage, eine Desarguessche Ebene anzugeben, in der ein solcher gemeinsamer Punkt $Q \neq P$ existiert:

Wir wählen einfach diejenige Desarguessche Ebene, die den konstruierten Körper SK zum Koordinatenkörper hat. Außerdem setzen wir $x_0 = a$ und haben dann wegen

$$ba - ab = 1$$

für (1) die Lösung $z = b$.

Dieser entspricht der gemeinsame Punkt $Q(x, y)$, der durch

$$b = (x - x_0)^{-1} \text{ und } xy = 1$$

bestimmt ist.

Gesamtheit der gemeinsamen Punkte Q :

Wir fragen nach der allgemeinen Lösung der Gleichung

$$za - az = 1 \quad (1')$$

Ist z irgend eine Lösung von (1'), so gilt für

$q = z - b$:

$$\begin{aligned} qa - aq &= (za - az) - (ba - ab) = \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

q gehört also dem Normalisator von a an. Umgekehrt stellt offenbar jedes $z = b + q$, dessen q mit a vertauschbar ist,

eine Lösung von (1') dar.

Die allgemeine Lösung von (1') lautet demnach:

$$z = b + q \quad \text{mit } qa = aq .$$

Insbesondere kann man für q jede rationale Zahl wählen.

Es gibt demnach unendlich viele Lösungen von (1').

Diesen entsprechen auch unendlich viele gemeinsame Punkte von g und der C_2 .

Das Ergebnis fassen wir zusammen in dem

Satz:

In der Desarguesschen Ebene, die SK zum Koordinatenkörper hat, existieren unendlich viele gemeinsame Punkte

von $g: y - a^{-1} = -1/a^2(x - a)$ und der $C_2: xy = 1$,

und zwar sind es genau die C_2 -Punkte mit

$$x = a + (b + q)^{-1} ,$$

wobei q aus dem Normalisator von a .

III.

REGULAERE PUNKTE.

In Abschnitt I haben wir die nicht entartete C_2 als Erzeugnis zweier projektiver Büschel

$$g_2 = p(g_1)$$

erhalten, bei denen die Verbindungsgerade der Träger P_1, P_2 sich nicht selbst entspricht.

Es zeigte sich, daß insbesondere die Träger P_1, P_2 dem Erzeugnis angehören.

Es fragt sich nun, ob diese Träger unter den Kegelschnittspunkten eine Sonderrolle spielen oder ob je zwei beliebige Punkte der C_2 die Rolle der bisherigen Träger P_1, P_2 übernehmen können.

Zur Klärung dieser Frage ermitteln wir an Hand des Trägers P_1 notwendige Bedingungen dafür, daß ein Kegelschnittspunkt als "Trägerpunkt" auftreten kann.

Wir bedienen uns hierzu wie in I eines speziellen Bezugssystems mit den Grundpunkten:

$$E_0 = p(P_1 P_2) \times p^{-1}(P_1 P_2)$$

$$E_1 = \text{Träger } P_1$$

$$E_2 = \text{Träger } P_2 .$$

Den Einheitspunkt wählen wir wieder so, daß die C_2 die Gleichung

$$xy = 1$$

hat.

Mit Hilfe dieser Darstellung erkennt man folgende

notwendige Bedingung A:

Durch einen Trägerpunkt T geht eine Gerade t , die nur T mit der C_2 gemeinsam hat.

In der Tat hat für den Träger P_1 die Koordinatenachse $x_2 = 0$ diese Eigenschaft: sie enthält P_1 , jedoch von den übrigen C_2 -Punkten weder den zweiten uneigentlichen Kegelschnittspunkt P_2 noch einen eigentlichen, denn für einen solchen ist $x_2 \neq 0$ wegen $xy = 1$.

Betrachtet man nun auch die von $x_2 = 0$ verschiedenen Geraden durch P_1 , so erhält man die

notwendige Bedingung B:

Jede von t verschiedene Gerade s durch einen Trägerpunkt T trifft die C_2 außer in T in genau einem Punkte Q .

Zum Beweis setzen wir wieder $T = P_1$ und unterscheiden zwei Fälle:

- 1) $s = P_1P_2$: Dann sind P_1, P_2 offensichtlich die einzigen gemeinsamen Punkte.
- 2) $s \neq P_1P_2$: Dann hat s eine Gleichung
$$a_0x_0 + a_2x_2 = 0 \text{ mit } a_0a_2 \neq 0$$
und man findet genau die folgenden gemeinsamen Punkte:
$$P_1 \text{ und } Q = (-1, a_0^{-1}a_2, a_2^{-1}a_0) .$$

Definition:

Ein C_2 -Punkt heiße regulär, wenn es eine Gerade t durch P gibt, die nur den Punkt P mit der C_2 gemeinsam hat, und wenn jede von t verschiedene Gerade durch P die C_2 noch in genau einem Punkte $Q \neq P$ trifft.

Die eindeutig bestimmte Gerade t werde als Tangente in P bezeichnet.

Die Bedingungen A,B können wir zusammenfassen in dem
Satz III,1:

Als Trägerpunkte einer C_2 kommen nur die regulären C_2 -Punkte in Betracht.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß jeder reguläre Punkt der C_2 zum Trägerpunkt gemacht werden kann.

Analytische Kennzeichnung der regulären Punkte

$$\underline{\text{von } xy = 1.}$$

Satz III,2:

Ist $a (\neq 0)$ aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers, so ist $A(a, a^{-1})$ regulärer Punkt der C_2 : $xy = 1$.

Beweis:

a) Wir zeigen zuerst: die Gerade

$$t : x_2 - a^{-1}x_0 = -1/a^2(x_1 - ax_0) \quad (1)$$

trifft die C_2 nur in A. Zu diesem Zweck nehmen wir im Gegenteil an, es gibt einen gemeinsamen Punkt $Q(x_1) \neq A$.
Fallunterscheidung:

1) $x_0 = 0$: Als Punkt der C_2 wäre Q dann entweder gleich (010) oder (001). Keiner dieser Punkte genügt aber (1).

2) $x_0 \neq 0$: Mit $x = x_1x_0^{-1}$, $y = x_2x_0^{-1}$

haben wir dann für Q die Gleichungen

$$y - a^{-1} = -1/a^2(x - a) \quad \text{und} \quad xy = 1.$$

Hieraus folgt für $z = (x - a)^{-1}$:

$$za - az = 1,$$

wie auf S.12 gezeigt wurde. Diese Gleichung widerspricht aber der Voraussetzung, daß a aus dem Zentrum.

t trifft also die C_2 nur in A.

b) Es sei s eine von t verschiedene Gerade durch A. wir beweisen, daß genau ein gemeinsamer Punkt $Q \neq A$ existiert.
Fallunterscheidung:

1) $s : x_2 = a^{-1}x_0$. Dann ist Q notwendig gleich (010).

2) $s : x_1 = ax_0$ " " " " (001).

3) $s : x_2 - a^{-1}x_0 = m(x_1 - ax_0)$ mit $m \neq 0$, $\neq -1/a^2$.

Für einen gemeinsamen Punkt $Q(x_1)$ ist dann jedenfalls $x_0 \neq 0$, denn die obige Gleichung wird durch keinen der Kegelschnittpunkte (010), (001) erfüllt.

Wir können daher setzen: $x = x_1x_0^{-1}$, $y = x_2x_0^{-1}$

und haben hierfür die Gleichungen

$$y - a^{-1} = m(x - a), \quad xy = 1.$$

Nach S. 12 folgt hieraus für $z = (x - a)^{-1}$ die notw. und hinreichende Bedingung:

$$z(am)^{-1} + az = -1.$$

Da a aus dem Zentrum, können wir hier az durch za ersetzen:

$$z((am)^{-1} + a) = -1$$

Hier ist $(am)^{-1} + a \neq 0$ auf Grund der Voraussetzung $m \neq -1/a^2$. Es gibt also nur die eine Lösung

$$z = \frac{-1}{(am)^{-1} + a},$$

und daher genau einen gemeinsamen Punkt $Q \neq A$.

Nach 1-3 trägt somit jede von t verschiedene Gerade durch A genau einen C_2 -Punkt $Q \neq A$.

Die Ergebnisse von a) und b) besagen, daß A regulär ist.

Satz III,2 läßt sich umkehren.

Satz III,3:

Ist $A(a, a^{-1})$ regulärer Punkt von $xy = 1$, so gehört a zum Zentrum des Koordinatenkörpers.

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz:

Unter der Voraussetzung des letzten Satzes ist die Gerade

$$h: y - a^{-1} = -1/a^2(x - a)$$

identisch mit der Tangente t in A .

Zum Beweise nehmen wir an: $h \neq t$.

Nach Definition des regulären Punktes existiert dann genau ein gemeinsamer Punkt $Q \neq A$ von h und der C_2 . Q ist offensichtlich ein eigentlicher Punkt. Nach Satz II,1 können wir daher weiter folgern, daß die Gleichung

$$za - az = 1$$

genau eine Lösung hat. Dies ist aber ein Widerspruch, denn mit z ist beispielsweise auch $z+1$ Lösung dieser Gleichung.

Es ist also in Wahrheit $h = t$, q.e.d.

Wir kommen jetzt zum

Beweis von Satz III,3:

Aus dem Hilfssatz können wir schließen, daß jede Gerade

$$y - a^{-1} = m(x - a) \quad \text{mit } m \neq -1/a^2, \neq 0$$

die C_2 außer in A noch in genau einem Punkt $Q \neq A$ schneidet.

Nach Satz II,1 hat daher die Gleichung

$$z(am)^{-1} + az = -1$$

für jedes $m \neq -1/a^2$, $\neq 0$ genau eine Lösung z .

Die Eindeutigkeit der Lösung z besagt, nun für die zugehörige homogene Gleichung

$$z'(am)^{-1} + az' = 0, \quad (1')$$

daß sie für jedes derartige m nur die triviale Lösung $z' = 0$ besitzt.

Hieraus können wir nun indirekt schließen, daß a dem Zentrum des Koordinatenkörpers angehört.

Nimmt man nämlich an, a ist nicht aus dem Zentrum; so gibt es wenigstens ein d , für das

$$da \neq ad.$$

Ermitteln wir nun das eindeutig bestimmte f , für das

$$fa = ad,$$

so ist sicher $f \neq d$.

Mit diesem Paar, f, d können wir eine nichttriviale Lösung von $(1')$ konstruieren. Man schreibe nämlich diese Gleichung zunächst in der Form

$$z'(a^2m)^{-1} \cdot a + az' = 0 \quad \text{und setze im Vergleich mit} \quad fa - ad = 0$$

$$z' = -d \quad \text{und} \quad z'(a^2m)^{-1} = f.$$

Für m ergibt sich so:

$$m = (-1/a^2)(f^{-1}d).$$

Dieses m ist verschieden von $-1/a^2$ (und von Null) und für dieses m hat die homogene Gleichung

$$z'(am)^{-1} + az' = 0$$

die nichttriviale Lösung $z = -d$.

Dies ist ein Widerspruch gegen die obige Feststellung, daß diese homogene Gleichung für $m \neq -1/a^2$, $\neq 0$ nur trivial lösbar ist.

Die Annahme, a ist nicht aus dem Zentrum, ist also falsch. Die beiden letzten Sätze fassen wir zusammen in

Satz III,4:

Ein Punkt $A(a, a^{-1})$ ist genau dann regulärer Punkt von $xy = 1$, wenn a dem Zentrum des Koordinatenkörpers angehört.

Wir können nun zeigen, daß jeder reguläre Punkt einer C_2 zum Trägerpunkt gemacht werden kann.

Satz III,5:

Durch je zwei reguläre Punkte A,B einer C_2 kann man projektive Büschel

$$g_2' = p'(g_1')$$

legen, die die C_2 erzeugen.

Beweis:

Die C_2 sei gegeben als Erzeugnis der projektiven Büschel

$$g_2 = p(g_1)$$

mit den Trägern P_1, P_2 und es werde wieder das bisherige Koordinatensystem zugrunde gelegt:

$$P_1 = (010), P_2 = (001), C_2: xy = 1.$$

Zum Beweise genügt es, eine projektive Kollineation P anzugeben, die

- 1) die P_1, P_2 in die gegebenen regulären Punkte A,B überführt,
- 2) die C_2 als ganzes festläßt.

Eine solche projektive Kollineation stellt nämlich aus den gegebenen projektiven Büscheln

$$g_2 = p(g_1)$$

gerade solche projektive Büschel

$$g_2' = p'(g_1')$$

her, deren Träger nach 1) die gegebenen A,B sind, und deren Erzeugnis nach 2) wieder dieselbe C_2 ist.

Auf Grund der Regularität der A,B läßt sich eine projektive Kollineation der gewünschten Art tatsächlich angeben.

Fallunterscheidung:

- a) A,B sind eigentliche Punkte: $A = (a, a^{-1}), B = (b, b^{-1})$.

Nach Satz III,3 sind a,b aus dem Zentrum.

Für P kann man wählen:

$$\begin{aligned} x_0' &= (a+b)x_0 + a x_1 + b x_2 \\ x_1' &= 2ab x_0 + a^2 x_1 + b^2 x_2 \quad (\text{Det.} = (a-b)^3 \neq 0) \\ x_2' &= 2 x_0 + x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die Bilder von (010), (001) die gegebenen A, B sind und rechnet unter Benutzung der Kommutativität der a, b leicht nach, daß $C_2' = C_2$ ist.

- b) Ist genau einer der A, B uneigentlich, etwa $A = P_1$, so leistet die projektive Kollineation

$$x_0' = x_0 + bx_2$$

$$x_1' = 2bx_0 + x_1 + b^2x_2$$

$$x_2' = x_2$$

das Verlangte.

- c) Im Falle die Paare A, B und P_1, P_2 übereinstimmen ist die Behauptung trivial.

IV.

VERALLGEMEINERUNG VON KEGELSCHNITTSÄTZEN .

Im folgenden werden einige bekannte Sätze über Kegelschnitte auf die Desarguessche Ebene übertragen. Es gelingt dabei in jedem Falle, die Voraussetzungen abzuschwächen.

Während man gewöhnlich den Satz von Pappos voraussetzt und damit nach Satz III,4 die Regularität sämtlicher Kegelschnittspunkte, kommen die folgenden Beweise mit der Regularität von ≥ 3 C_2 -Punkten aus.

Als Hilfsmittel wird in 1-3 ein spezielles Verfahren zur Erzeugung einer C_2 entwickelt. Die C_2 wird hierbei vermöge einer Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \text{Gerade} & \rightarrow & \text{Punkt} \\ u & \rightarrow & X \end{array}$$

als Abbild eines Geradenbüschels erhalten.

Die Zuordnung $u \rightarrow X$ hängt aufs engste mit dem Desargues - schen Satz zusammen: u und X stehen zueinander in dem Verhältnis von Achse und Zentrum einer Desargues-Figur.

1) Kommutative Vektoren.

Definition:

Ein nichttrivialer Vektor (x_0, x_1, x_2) werde als kommutativ bezeichnet, wenn

$$x_0 x_1 = x_1 x_0, \quad x_1 x_2 = x_2 x_1, \quad x_2 x_0 = x_0 x_2,$$

und als halbkommutativ, wenn von diesen Gleichungen wenigstens 2 richtig sind.

Für jeden Punkt P läßt sich ein halbkommutativer Zeiger wählen: Ist nämlich (x_0, x_1, x_2) irgend ein Vektor für P , etwa mit $x_0 \neq 0$, so ist $(1, x_1 x_0^{-1}, x_2 x_0^{-1})$ halbkommutativ.

Satz IV, 1:

Die halbkommutativen Lösungen von

$$x_1 x_2 = x_0^2 \quad (1)$$

stellen die C_2 : $xy = 1$ dar, und zwar mit Einschluß der "Fernpunkte" (010) , (001) .

Der Beweis wird etwas vereinfacht durch den folgenden Hilfssatz, den wir auch später noch heranziehen werden.

Ist (x_i) halbkommulative Lösung von

$$x_1 x_2 = x_0^2,$$

so ist (x_i) sogar kommutativ.

Beweis:

Ist ein $x_i = 0$, so sind auf Grund von (1) genau zwei Komponenten Null und die Behauptung ist trivial.

Wir nehmen also an $x_0 x_1 x_2 \neq 0$.

- 1) Es sei x_0 mit x_1, x_2 vertauschbar. Dann löse man (1) nach x_1 auf:

$$x_1 = x_0^2 x_2^{-1}$$

und sieht an der rechten Seite, daß auch $x_1 x_2 = x_2 x_1$.

- 2) x_1 ist mit x_0, x_2 vertauschbar. Dann folgt aus

$$x_2 = x_1^{-1} x_0^2$$

$$x_0 x_2 = x_2 x_0.$$

- 3) x_2 ist mit x_0, x_1 vertauschbar. Dann schreibe man statt (1) $x_2 x_1 = x_0^2$ und hat damit Fall 2) hergestellt.

Beweis von Satz IV,1:

- 1) Wir zeigen, daß jede halbkommulative Lösung von (1) einen C_2 -Punkt darstellt.

Fallunterscheidung:

- a) $x_0 = 0$: (x_i) ist dann von der Form $(0a0)$ oder $(00b)$, stellt also einen der Fernpunkte der C_2 dar.
b) $x_0 \neq 0$: Dann folgt wegen der Kommutativität von (x_i) aus (1):

$$(x_1 x_0^{-1})(x_2 x_0^{-1}) = 1.$$

$P(x_i)$ gehört also zur C_2 .

- 2) Ist P ein Punkt der C_2 , so genügt jeder halbkommulative Vektor von P der Gleichung (1), wie leicht zu sehen durch die

Fallunterscheidung:

- a) $x_0 = 0$: Dann ist P einer der Fernpunkte der C_2 und (x_i) erfüllt offenbar (1).

b) $x_0 \neq 0$: Dann gilt $(x_1 x_0^{-1})(x_2 x_0^{-1}) = 1$ (1') .

Da (x_i) halbkommutativ sein soll, ist x_0 mit wenigstens einem der x_1, x_2 vertauschbar.

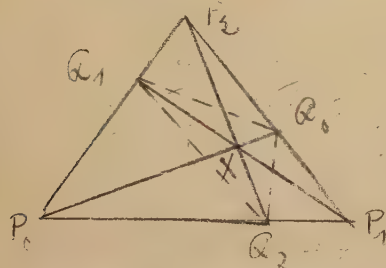
Ist etwa $x_0 x_2 = x_2 x_0$, so multipliziere man Gleichung (1') von rechts mit x_0^2 , was (1) ergibt.

Im Falle $x_0 x_1 = x_1 x_0$ vertausche man in (1') zuerst die Klammern.

Damit ist der Satz bewiesen.

2) Die Zuordnung: $x_i = 1/u_i$.

Wir nehmen in einer Desarguesschen Ebene 3 nicht kollineare Punkte P_i an, für das folgende fest. X sei irgend ein Punkt, der auf keiner der Seiten $P_i P_k$ liegt. Jedem solchen X ordnen wir eine Gerade u zu, vermöge der folgenden Konstruktionsvorschrift:



X wird mit jeder Ecke P_i verbunden, XP_i mit $P_j P_k$ geschnitten. Es sei

$$Q_i = XP_i \times P_j P_k .$$

Die Dreiecke P_i und Q_i sind perspektiv mit X als Zentrum.

Nach dem Desarguesschen Satz liegen daher die Schnittpunkte $S_0 = P_1 P_2 \times Q_1 Q_2$, $S_1 = P_2 P_0 \times Q_2 Q_0$, $S_2 = P_0 P_1 \times Q_0 Q_1$ auf einer Geraden u . Diese definieren wir als Bild von X :

$$u = u(X) .$$

Soll die Abhängigkeit von den Grundpunkten P_i besonders hervorgehoben werden, so schreiben wir:

$$u = u(X, P_i) .$$

Analytische Darstellung von $u = u(X, P_i)$:

Wir benützen ein projektives Bezugssystem mit den Grundpunkten $E_i = P_i$.

X habe die Koordinaten x_i . Die Q_i haben dann folgende Vektoren:

$$(0, x_1, x_2) , (x_0, 0, x_2) , (x_0, x_1, 0) .$$

Gemäß obiger Konstruktionsvorschrift bestimmen wir einen Vektor (s_i) für S_0 :

Da S_0 auf P_1P_2 liegt, ist $s_0 = 0$. Die Inzidenz mit der Geraden Q_1Q_2 verlangt, daß (s_i) eine Linearkombination

$$(x_0, 0, x_2) \cdot m + (x_0, x_1, 0) \cdot n$$

ist. Beiden Forderungen wird gerecht der Vektor :

$$(0, -x_1, x_2) \cdot$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich :

$$S_1 = (x_0, 0, -x_2) \cdot$$

Ein Vektor (u_i) für die Bildgerade u genügt demnach den Gleichungen:

$$-u_1x_1 + u_2x_2 = 0$$

$$u_0x_0 - u_2x_2 = 0 \cdot$$

Hieraus folgt bis auf einen linksseitigen Proportionalitätsfaktor:

$$\underline{u_i = 1/x_i}$$

Dieser Darstellung liest man ab:

- 1) Mit x_0, x_1, x_2 ist auch $u_0u_1u_2 \neq 0$, d.h. die Bildgerade u geht durch keinen P_i .
- 2) Zu jeder Geraden u , die keinen P_i enthält, gibt es genau einen Ursprung X mit $u = u(X)$.

Wir können daher auch die inverse Abbildung

$$X = X(u)$$

definieren für Geraden u , die mit keinem P_i inzidieren.

Diese wird dargestellt durch

$$\underline{x_i = 1/u_i}$$

Wir wollen jetzt von der Herkunft der Zuordnung $X(u)$ ganz absehen, und nachträglich auch Geraden u zulassen, die durch genau einen P_i gehen.

Wir erweitern die Zuordnung durch die folgende

Festsetzung:

Geht u durch genau einen P_i , so soll unter $X(u)$ der Punkt P_i verstanden werden.

Diese Erweiterung wird sich im folgenden als sehr zweckmäßig erweisen.

3) Erzeugung einer C_2 .

Welches Abbild erzeugt die Zuordnung

$$X = X(u)$$

von einem Geradenbüschel (u) ?

Der Träger von (u) sei T . Wir beschränken uns auf den Fall, daß T auf keiner $P_i P_k$ liegt. T habe in dem bisherigen Bezugssystem den Vektor (t_i) .

Für eine Gerade u aus (u) gilt dann :

$$u_i t_i = 0 \quad (1)$$

Fallunterscheidung:

a) $u_0 u_1 u_2 \neq 0$:

Dann ist der Bildpunkt $X = X(u)$ gegeben durch

$$x_i = 1/u_i$$

Zusammen mit (1) ergibt sich für X die notwendige Bedingung:

$$x_i^{-1} t_i = 0 .$$

Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt, so ist X Bild einer Geraden u aus (u) .

b) $u_0 u_1 u_2 = 0$:

Da T keiner $P_i P_k$ angehört, geht u durch genau einen P_i und es ist dann:

$$X(u) = P_i .$$

Ergebnis:

Das Abbild $X((u))$ eines Geradenbüschels (u) , dessen Träger $T(t_i)$ auf keiner Seite $P_i P_k$ liegt, besteht aus den Lösungen von

$$x_i^{-1} t_i = 0 \quad (I)$$

und den Punkten P_i .

Die homogene Gleichung.

Das Abbild $X((u))$ läßt sich durch eine homogene Gleichung darstellen, die auch die Punkte P_i erfaßt.

Zunächst mache man T zum Einheitspunkt. Dadurch geht (I) über in

$$x_0^{-1} + x_1^{-1} + x_2^{-1} = 0 \quad (I')$$

Weiter wähle man den Vektor (x_i) halbkommutativ. Dann ist er sogar kommutativ. Ist nämlich z.B. x_0 mit x_1, x_2 ver-

tauschbar, so löse man (I') nach x_1^{-1} auf:

$$x_1^{-1} = -(x_0^{-1} + x_2^{-1})$$

und sieht an der rechten Seite, daß dann auch $x_1 x_2 = x_2 x_1$.

Wegen der Kommutativität von (x_i) kann man nun in gewöhnlicher Weise erweitern und erhält:

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = 0 \quad (I'')$$

Ist also (x_i) eine halbkommulative Lösung von (I'), so auch von (I'').

Außerdem wird aber Gleichung (I'') auch von den Punkten P_i befriedigt. Die halbkommutativen Lösungen von (I'') umfassen somit sämtliche Punkte von $X(u)$.

Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß jede halbkommulative Lösung von (I'') einen Punkt von $X(u)$ vorstellt. Eine solche ist ja offenbar von selbst kommutativ!

Wir haben damit den

Satz IV,2:

Das Abbild $X(u)$ des Geradenbüschels (u) mit dem Träger (111) wird dargestellt durch die Gesamtheit der halbkommutativen Lösungen von

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = 0.$$

Über den Charakter von $X(u)$ gibt Auskunft der

Satz IV,3:

Das Abbild $X(u)$ eines Geradenbüschels (u) , dessen Träger auf keiner $P_i P_k$ liegt, ist ein Kegelschnitt, der die P_i zu regulären Punkten hat.

Zum Beweise wenden wir auf die halbkommutativen Lösungen von (I'') die Transformation

$$x_0 = z_0, \quad x_1 = z_1 - z_0, \quad x_2 = z_2 - z_0$$

an. Beachtet man hierbei, daß jede halbkommulative Lösung von (I'') sogar kommutativ ist, so erhält man:

$$z_1 z_2 = z_0^2.$$

Hat man umgekehrt eine halbkommulative Lösung z_i dieser Gleichung, so sind die zugehörigen x_i ebenfalls halbkommutativ (sogar kommutativ!) und diese erfüllen (I'').

$X(u)$ ist also eine C_2 .

Daß P_1 regulärer Punkt dieser C_2 ist, folgt sofort daraus, daß er in den z_i den Vektor (010) hat, also im Sinne von Abschnitt III ein Trägerpunkt ist.

Da aber in den Voraussetzungen keiner der P_i besonders ausgezeichnet wurde, sind auch P_0, P_2 regulär.

Satz IV, 4:

Die Tangente t_i in P_i von $X((u))$ ist die 4.harmonische Gerade zu $P_i P_k$, $P_i P_j$, $P_i T$, wobei T wieder den Träger von (u) bezeichnet.

Beweis:

Wegen der Gleichberechtigung der P_i können wir uns auf $P_i = P_1$ beschränken.

In obigen z_i -Koordinaten hat die Tangente t_1 nach A III die Gleichung $z_2 = 0$. Transformiert man diese auf die x_i -Koordinaten von S.42, so erhält man

$$t_1 : x_0 + x_2 = 0 .$$

Ferner gilt: $P_1 T: x_0 - x_2 = 0$

$$P_1 P_2: x_0 = 0$$

$$P_1 P_0: x_2 = 0 .$$

Aus diesen 4 Gleichungen folgt die Behauptung.

Die Zuordnung $C_2 = C_2(T, P_i)$.

Wir nehmen 3 nicht kollineare Punkte P_0, P_1, P_2 an und definieren in bezug darauf die Zuordnung

$$X = X(u) .$$

Ferner sei T ein Punkt, der keiner der Seiten $P_i P_k$ angehört. Durch T legen wir das Geradenbüschel (u) und bilden dies vermöge $X = X(u)$ ab. Es entsteht eine C_2 . Sie ist durch die Punkte P_i, T in der angegebenen Bedeutung, bestimmt. Wir bezeichnen sie mit :

$$C_2 = C_2(T, P_i) .$$

Jede solche $C_2(T, P_i)$ hat nach Satz IV, 3 die P_i zu regulären Punkten. Umgekehrt gilt

Satz IV, 5:

Hat man irgend eine (nicht entartete) C_2 , für die die P_i regulär sind, so gibt es genau ein T so, daß

$$C_2 = C_2(T, P_i) .$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Existenz von T .

Zu diesem Zweck denken wir uns die C_2 durch projektive Büschel

$$g' = p(g)$$

erzeugt. Als Träger dieser Büschel wählen wir die regulären Punkte P_1, P_2 . Nach Satz III,5 ist dies möglich. Weiter stellen wir die C_2 durch eine Gleichung dar.

Hierfür benutzen wir wie in Abschnitt I ein Bezugssystem (z_i) mit den Grundpunkten

$$E_0 = p(P_1 P_2) \times p^{-1}(P_1 P_2), \quad E_1 = P_1, \quad E_2 = P_2.$$

Als Einheitspunkt E wählen wir P_0 . Die Wahl ist zulässig, da P_0 offenbar auf keiner Koordinatenachse liegt.

Nach I,9 genügen die C_2 -Punkte mit $z_0 \neq 0$ einer Gleichung

$$(az_1 z_0^{-1})(bz_2 z_0^{-1}) = 1 \quad (+).$$

Nach Wahl des Einheitspunktes ist:

$$ab = 1.$$

Wir behaupten weiter, daß a aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers ist. Setzt man nämlich $x = az_1 z_0^{-1}$, $y = bz_2 z_0^{-1}$, so bekommt die C_2 die Gleichung $xy = 1$ und P_0 die inhomogenen Koordinaten a, a^{-1} . Nach Voraussetzung ist P_0 aber regulärer Punkt der C_2 . Daraus folgt nach Satz III,3, daß a aus dem Zentrum.

Gleichung (+) vereinfacht sich dadurch zu

$$(z_1 z_0^{-1})(z_2 z_0^{-1}) = 1.$$

In homogenen, halbkommutativen Koordinaten gilt daher nach Satz IV,1:

$$z_1 z_2 = z_0^2.$$

Diese Gleichung unterwerfen wir nun noch der Transformation:

$$z_0 = x_0, \quad z_1 = x_1 + x_0, \quad z_2 = x_2 + x_0.$$

Mit den z_i sind auch die x_i kommutativ. Es folgt:

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = 0.$$

Diese Punktmannigfaltigkeit ist nach Satz IV,2 das Bild $X(u)$ des Geradenbüschels (u) , das in den x_i den Träger (111) hat.

Die Grundpunkte der Zuordnung $X = X(u)$ sind dabei diejenigen des x_i -Bezugssystems. Bezeichnen wir diese mit P_i' , so ist also:

$$C_2 = C_2(T, P_i') ,$$

wobei T in unserem System gleich (111) ist.

Wir zeigen nun noch: $P_i' = P_i$.

In den x_i haben die P_i' die Vektoren

$$(100), (010), (001)$$

und daher in den z_i gemäß obiger Transformationsgleichungen:

$$(111), (010), (001) .$$

Dies sind aber zugleich die z_i -Darstellungen der P_i .

Also $P_i' = P_i$ und $C_2 = C_2(T, P_i)$, q.e.d.

Wir zeigen weiter, daß T eindeutig bestimmt ist.

Nach Satz IV,4 ist TP_i identisch mit der 4. harmonischen Geraden s_i zu

$$TP_j, TP_k, t_i .$$

T ist daher gemeinsamer Punkt der drei Geraden s_i . Da diese offenbar paarweise verschieden sind, ist T durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt.

Die Sätze IV,3 , IV,5 fassen wir zusammen in

Satz IV, 6:

Die Desarguesschen Kegelschnitte, die 3 vorgegebene, nicht kollineare Punkte P_i zu regulären Punkten haben, sind genau die $C_2(T, P_i)$. T ist dabei nach Vorgabe der P_i eindeutig durch die C_2 bestimmt.

Als Nebenergebnis des letzten Beweises erwähnen wir

Satz IV, 7:

Eine Desarguessche C_2 habe die (nicht kollinearen) regulären Punkte P_i und die zugehörigen Tangenten t_i . Unter s_i werde die 4. harmonische Gerade zu

$$P_i P_k, P_i P_j, t_i$$

verstanden. Die 3 Geraden s_0, s_1, s_2 schneiden sich in einem Punkte, nämlich in T , für den $C_2 = C_2(T, P_i)$ ist.

Für spätere Verwendung schließen wir hieran

Satz IV, 8:

Die Gerade s_i geht durch den Schnittpunkt der Tangenten t_j und t_k .

Beweis:

In einem Bezugssystem mit den Grundpunkten $E_i = P_i$ und dem Einheitspunkt $E = T$ haben die Tangenten t_1, t_2 die Gleichungen:

$$x_0 + x_2 = 0$$

$$\text{bzw. } x_0 + x_1 = 0.$$

Ihr Schnittpunkt ist also $(-1, 1, 1)$. Andererseits wird s_0 durch

$$x_1 - x_2 = 0$$

dargestellt, wofür ebenfalls $(-1, 1, 1)$ Lösung ist. Es geht also s_0 durch $t_1 \times t_2$. Der Rest folgt durch zyklische Vertauschung.

Folgerung:

s_0 kann als Verbindungsgerade $P_0(t_1 \times t_2)$ aufgefaßt werden, allgemein s_i als Verbindungsgerade

$$P_i(t_j \times t_k).$$

Hierdurch geht Satz IV,7 über in

Satz IV, 9:

Einer Desarguesschen C_2 sei ein Tangentendreieck t_0, t_1, t_2 umschrieben, dessen Berührungspunkte der regulären Punkte P_i sind. Dann gehen die 3 Verbindungsgeraden

$$P_i(t_j \times t_k)$$

durch ein und denselben Punkt, nämlich durch den Punkt T , für den $C_2 = C_2(T, P_i)$ ist.

Hiernach sind also die Tangenten t_i dreier regulärer Kegelschnittspunkte voneinander abhängig: Durch 2 von ihnen ist (zusammen mit den P_i) die dritte eindeutig bestimmt.

Hierdurch wird nahegelegt, die Tangente auch für einen nicht notwendig regulären Kegelschnittspunkt zu definieren. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

Vorher wollen wir die für eine Desarguessche C_2 angegebene spezielle Erzeugungsweise ausnutzen, um einige Sätze über Kegelschnittbüschel für die Desarguessche Ebene zu verallgemeinern.

4) Kegelschnittbüschel.

Wir fragen zuerst nach dem Büschel der Desarguesschen Kegelschnitte, die

- a) 3 unabhängige Punkte P_i zu regulären Punkten haben,
- b) durch einen 4. gegebenen Punkt P_3 gehen, der nicht

auf einer $P_i P_k$ liegt.

Wegen a) ist jede solche C_2 von der Form

$$C_2(T, P_i) .$$

Es fragt sich nur, welcher Bedingung T zu genügen hat, damit $C_2(T, P_i)$ durch X_0 geht. Notwendig ist, daß das Büschel (u) durch T eine Gerade u_0 enthält mit

$$X_0 = X(u_0, P_i) .$$

Für u_0 kommt nur in Betracht

$$u_0 = u(X_0, P_i) .$$

Weiter darf T nicht dem Grunddreieck P_1 angehören.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend: Auf Grund der letzten kann man

$$C_2(T, P_i) = X((u), P_i) \text{ mit } (u) \cap T$$

bilden und jede solche C_2 enthält wegen $u_0 \cap T$ speziell den Punkt

$$X_0 = X(u_0, P_i) .$$

Wir haben also

Satz IV, 10:

Die Kegelschnitte durch P_0, P_1, P_2, X_0 , für die die P_i regulär sind, sind genau die $C_2(T, P_i)$, deren T auf

$$u_0 = u(X_0, P_i) ,$$

jedoch nicht auf einer Seite $P_i P_k$ liegt.

Ähnlich ist

Satz IV, 11:

P_0, P_1, P_2 seien unabhängig und t_0 eine Gerade, die mit genau einem P_i inzident ist, etwa mit P_0 . Die Gesamtheit der C_2 , die die P_i zu regulären Punkten haben und t als Tangente in P_0 , sind die $C_2(T, P_i)$, deren T der 4. harmonischen Geraden s_0 zu $P_0 P_1, P_0 P_2, t_0$ angehört, jedoch nicht einer Seite $P_i P_k$.

Beweis:

Sei C_2 ein derartiger Kegelschnitt. Wegen der Regularität der P_i gilt mit einem gewissen, nicht zu P_0, P_1, P_2 gehörenden T :

$$C_2 = C_2(T, P_i) .$$

Nach Satz IV, 4 liegt dabei T notwendig auf s_0 . Offenbar sind diese Bedingungen für T auch hinreichend.

Kegelschnitt der Desarguesschen Ebene durch 5 Punkte.

Satz IV, 12:

Sind P_0, P_1, P_2, X_0, X_1 in allgemeiner Lage, so gibt es genau eine Desarguessche C_2 durch diese 5 Punkte, die die P_i zu regulären Punkten hat.

Beweis:

Wir stellen zuerst die Eindeutigkeit fest: Eine solche C_2 ist nach Satz IV, 6 von Typ $C_2(T, P_i)$. Gemäß Satz IV, 10 liegt T

1. auf $u_0 = u(X_0, P_i)$
2. " $u_1 = u(X_1, P_i)$.

u_0, u_1 sind wegen der allgemeinen Lage der P_i, X_i verschieden, bestimmen also T eindeutig.

Dieses $T = u(X_0, P_i) \times u(X_1, P_i)$ leistet auch das Verlangte: Auf Grund unserer Unabhängigkeitsvoraussetzung über die P_i, X_i liegt T auf keiner $P_i P_k$, weshalb $C_2(T, P_i)$ existiert, und wegen $u_0 \in T, u_1 \in T$ enthält diese C_2 insbesondere $X_0 = X(u_0, P_i)$ und $X_1 = X(u_1, P_i)$.

Entsprechend beweist man die beiden folgenden Sätze.

Satz IV, 13:

Eine C_2 der Desarguesschen Ebene ist bestimmt durch

- a) 3 unabhängige Punkte P_i , die für die C_2 regulär sind,
- b) einen Punkt X_0 , der unabhängig ist von je zweien der P_i .
- c) die Tangente t_i in P_i .

Die Ausdrucksweise "ist bestimmt" soll die Existenz wie die Eindeutigkeit besagen.

Satz IV, 14:

Eine C_2 der Desarguesschen Ebene ist bestimmt durch

- a) wie oben
- b) die Tangenten t_i, t_k in den regulären Punkten P_i, P_k , wobei i, k zwei der Marken $0, 1, 2$.

Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes.

Eine C_2 der Desarguesschen Ebene ist nach Satz IV, 12 eindeutig festgelegt, wenn von ihr 3 reguläre Punkte P_0, P_1, P_2 sowie zwei nicht notwendig reguläre Punkte X_0, X_1 gegeben sind. Nimmt man noch einen weiteren C_2 -Punkt X_2 hinzu, so besteht also zwischen diesen 6 Punkten notwendig eine Abhängigkeit. Diese kann man in einer kommutativen Ebene bekanntlich durch den Pascalschen Satz ausdrücken. In einer nicht kommutativen Desarguesschen Ebene gilt zwar der Pascalsche Satz nicht allgemein, trotzdem ist es möglich, die Abhängigkeit zwischen den obigen 6 C_2 -Punkten durch eine Pascalsche Sechseckbedingung wiederzugeben.

Satz IV, 15 (Pascal) :

Einem Kegelschnitt der Desarguesschen Ebene sei ein Sechseck 1, 2, ..., 6 einbeschrieben und es sei jede zweite Ecke regulär. Dann liegen die 3 Schnittpunkte

$$(12) \times (45), \quad (23) \times (56), \quad (34) \times (61)$$

auf einer Geraden.

Beweis:

Sind die Punkte 1, 3, 5 regulär, so bezeichnen wir sie in dieser Reihenfolge mit P_0, P_1, P_2 und die Punkte 4, 6, 2 mit X_0, X_1, X_2 .

Sind die Punkte 2, 4, 6 regulär, so werden diese mit P_0, P_1, P_2 bezeichnet und die Punkte 5, 1, 3 mit X_0, X_1, X_2 .

Es handelt sich dann in jedem Falle um die folgenden drei Schnittpunkte:

$$S_0 = (P_1 X_2) \times (X_1 P_2), \quad S_1 = (P_2 X_0) \times (X_2 P_0), \quad S_2 = (P_0 X_1) \times (X_0 P_1).$$

Wegen der Regularität der P_i ist die C_2 nach Satz IV, 6 darstellbar als

$$C_2(T, P_i) .$$

Wir machen die P_i zu Grundpunkten E_i und T zum Einheitspunkt E eines projektiven Bezugssystems. Dann genügen die von den P_i verschiedenen C_2 -Punkte nach S. 41 der Gleichung:

$$1/x_0 + 1/x_1 + 1/x_2 = 0 .$$

Speziell für die X_k gilt demnach:

$$1/x_0^k + 1/x_1^k + 1/x_2^k = 0, \quad k = 0, 1, 2 .$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir nun die Abhängigkeit der S_i ab, ohne dabei das kommutative Gesetz zu benutzen :

Wir berechnen zu diesem Zweck für S_0 einen Vektor (s_0, s_1, s_2) . Man sieht leicht, daß hierbei $s_0 \neq 0$. Wir können daher

$$s_0 = 1$$

annehmen.

Da S_0 auf P_1X_2 liegt, ist $(1, s_1, s_2)$ als Linearkombination

$$(x_0^2, x_1^2, x_2^2) \cdot m + (0, 1, 0) \cdot n$$

darstellbar. Hierbei ist $x_0^2 \neq 0$, denn X_2 liegt nicht auf P_1P_2 . Es folgt somit:

$$m = 1/x_0^2$$

und weiter:

$$(1, s_1, s_2) = (1, x_1^2, 1/x_0^2, x_2^2, 1/x_0^2) + (0, 1, 0) \cdot n.$$

Da S_0 auch auf P_2X_1 liegt, kann man in ganz entsprechender Weise folgern:

$$(1, s_1, s_2) = (1, x_1^1, 1/x_0^1, x_2^1, 1/x_0^1) + (0, 0, 1) \cdot n'.$$

An der ersten Linearkombination sieht man nun, daß

$$s_2 = x_2^2, 1/x_0^2,$$

an der zweiten, daß

$$s_1 = x_1^1, 1/x_0^1.$$

S_0 hat also den Vektor:

$$(1, x_1^1, 1/x_0^1, x_2^2, 1/x_0^2).$$

Hierfür wird sich folgende Form als zweckmässig erweisen:

$$(x_0^0, 1/x_0^0, x_1^1, 1/x_0^1, x_2^2, 1/x_0^2).$$

S_1, S_2 erhält man hieraus durch zyklische Vertauschung bei den s_i und den x_i^k . Im ganzen findet man :

$$S_0: \delta_0 = (x_0^0, 1/x_0^0, x_1^1, 1/x_0^1, x_2^2, 1/x_0^2)$$

$$S_1: \delta_1 = (x_0^0, 1/x_0^0, x_1^1, 1/x_1^1, x_2^2, 1/x_1^2)$$

$$S_2: \delta_2 = (x_0^0, 1/x_0^0, x_1^1, 1/x_2^1, x_2^2, 1/x_2^2).$$

Die k -te Spaltensumme ($k = 0, 1, 2$) ist demnach

$$x_k^k (1/x_0^k + 1/x_1^k + 1/x_2^k).$$

Da X_k der C_2 angehört, verschwindet die Klammer. Es ist also

$$\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 0$$

und daher das Tripel S_i kollinear, q.e.d.

Bemerkungen:

- a) Der verallgemeinerte Pascalsche Satz läßt sich umkehren:
Sind P_0, P_1, P_2, X_0, X_1 in allgemeiner Lage gegeben und wird X_2 so bestimmt, daß $(P_i X_k) \times (P_k X_i)$ kollinear sind, so gehören diese 6 Punkte einer Desarguesschen C_2 an, nämlich der eindeutig bestimmten C_2 durch die 5 gegebenen Punkte, für die die P_i regulär sind. Die Pascalsche Konstruktion einer C_2 aus 5 Punkten ist also auch in einer D-Ebene brauchbar. Es ist jedoch zu beachten, daß das Erzeugnis im allgemeinen davon abhängt, welchen der gegebenen Punkte man die Rolle der P_i erteilt. Diese 3 Punkte werden nämlich zu regulären Punkten der C_2 , während dies für X_0, X_1 nicht der Fall zu sein braucht.

- b) Daß die 6 C_2 -Punkte P_i, X_i abhängig sind, kann man statt durch den verallgemeinerten Pascalschen Satz auch mit Hilfe der Zuordnung $u = u(X, P_i)$ ausdrücken, nämlich in der Weise, daß die 3 Geraden

$$u_k = u(X_k, P_i) \quad k = 0, 1, 2$$

durch ein und denselben Punkt gehen, durch den Punkt T , für den $C_2 = C_2(T, P_i)$ ist.

- c) In einer Desarguesschen Ebene ist die Wirkung einer Projektivität im allgemeinen durch 3 Paare entsprechender Strahlen noch nicht eindeutig bestimmt. Jedoch läßt sich aus Satz IV, 12 folgern:

Sind $(g), (g')$ Büschel mit den verschiedenen Trägern

P_0, P_1 und werden aus (g) die Geraden g_2, h_0, h_1 und aus (g') die Geraden g_2', h_0', h_1' so gewählt, daß die 5 Punkte

$P_0, P_1, P_2 = g_2 \times g_2', X_0 = h_0 \times h_0', X_1 = h_1 \times h_1'$ in allgemeiner Lage sind, so gibt es eine nicht entartete Projektivität p , die die Zuordnungen $g_2 g_2', h_0 h_0', h_1 h_1'$ trifft und

die außerdem den Punkt $P_2 = g_2 \times g_2'$ zum regulären Punkt des Erzeugnisses werden läßt; ist p' eine zweite Projektivität von der nämlichen Art, so ist für alle g aus (g) : $p(g) = p'(g)$.

Eine solche Projektivität erhält man übrigens gerade durch die obige Pascalsche Konstruktion, wenn man dabei durch P_0 den Strahl $g = P_0 X_2$ legt und den zugehörigen Strahl $g' = P_1 X_2$ gemäß der Pascalschen Bedingung konstruiert, daß die

$(P_i X_k) \times (P_k X_i)$ kollinear sind.

V.

DUALISIERUNG.

Auch in der Desarguesschen Ebene gilt das Dualitätsprinzip, denn aus ihren Axiomen folgen die dazu dualen Aussagen.

Man kann daher die vorausgehenden Entwicklungen dualisieren. Als Gegenstück zur C_2 erhält man dabei eine Geradenmannigfaltigkeit C^2 , die das Erzeugnis projektiver Punktreihen ist. Sie werde wie üblich als Kurve 2. Klasse bezeichnet. Für die (nicht entartete) C^2 der Desarguesschen Ebene wollen wir in der folgenden Gegenüberstellung zur C_2 einige Begriffe und Sätze angeben, die später benötigt werden.

C_2

C^2

Erzeugnis projektiver Büschel

Erzeugnis projektiver Punktreihen

$$g' = p(g)$$

$$X' = p(X)$$

Regulärer Punkt P:

Reguläre Gerade t:

(Definition)

Durch P geht genau eine Gerade, die nur P mit der C_2 gemeinsam hat, jede andere Gerade durch P schneidet die C_2 in genau 2 Punkten.

t enthält genau einen Punkt, dessen Büschel nur t mit der C^2 gemeinsam hat, jeder andere Punkt von t ist mit genau 2 Geraden der C^2 inzident.

Satz:

Reguläre Punkte von

$$x_1 x_2 = x_0^2 (x_1 \text{ komm. !})$$

sind: (010), (001) und

diejenigen C_2 -Punkte, deren

$$x = x_1 x_0^{-1}$$

aus dem Zentrum.

Reguläre Geraden von

$$u_1 u_2 = u_0^2 (u_1 \text{ komm. !})$$

sind: (010), (001) und

diejenigen C^2 -Geraden, deren

$$u = u_0^{-1} u_1$$

aus dem Zentrum.

Satz:

Je zwei reguläre C_2 -Punkte und nur solche, tragen projektive Büschel, die die C_2 erzeugen.

Je zwei reguläre C^2 -Geraden und nur solche, tragen projektive Punktreihen, die die C^2 erzeugen.

Zusammenhang zwischen C_2 und C^2 .

In der gewöhnlichen Ebene bilden die Tangenten einer nicht entarteten C_2 eine C^2 ; es ist also jeder C_2 eine C^2 zugeordnet:

$$C^2 = T(C_2) .$$

Dual dazu ist die Hülle einer C^2 eine C_2 :

$$C_2 = H(C^2) .$$

Für die Zuordnungen T, H gilt:

$$HT(C_2) = C_2$$

$$TH(C^2) = C^2 .$$

Einen solchen Zusammenhang kann man nun auch in der Desargueschen Ebene herstellen, wenn die Charakteristik ihres Grundkörpers von 2 verschieden ist.

Dies soll im folgenden gezeigt werden. Hierfür wird zunächst die Definition der C_2 -Tangente auch auf nicht notwendig reguläre C_2 -Punkte ausgedehnt.

1) Tangente einer C_2 .

Um zu einer solchen Verallgemeinerung der Tangentendefinition zu gelangen, gehen wir von Satz IV,9 aus:

Es seien A, B, C reguläre Punkte einer C_2 , t_A, t_B, t_C die zugehörigen Tangenten. Zwischen diesen Tangenten besteht dann eine Abhängigkeit, nach der man z.B. t_C aus den übrigen Stücken erhalten kann, und zwar auf folgende Weise:

Durch C werden die 3 Geraden $CA, CB, C(t_A \times t_B)$ gelegt. t_C ist dann die 4.harmonische Gerade.

Wir ersetzen nun C durch einen nicht notwendig regulären Kegelschnittpunkt $X (\neq A, B)$ und geben die

Definition:

Es seien A, B reguläre C_2 -Punkte, t_A, t_B die zugehörigen Tangenten und X ein C_2 -Punkt $\neq A, B$, der nicht regulär zu sein braucht. Unter der Tangente t in X werde die 4.harmonische Gerade zu

$$XA, XB, X(t_A \times t_B)$$

verstanden. Für A, B werden die bisherigen Tangenten beibehalten.

Bemerkungen:

1. Ist die Charakteristik des Grundkörpers $= 2$, so fallen t_X und $X(t_A \times t_B)$ zusammen. Die Tangenten der C_2 gehen dann also sämtlich durch einen Punkt, nämlich durch $t_A \times t_B$, bilden somit sicher keine nicht entartete C^2 . Wir setzen daher für das folgende voraus, daß die Charakteristik $\neq 2$ ist.
2. Nach obiger Definition hängt die Tangente t formal ab von der Wahl der Hilfspunkte A, B . Sinnvoll ist die Definition jedoch nur, wenn t effektiv unabhängig ist von den A, B . Unter a) - d) wird bewiesen, daß dies zutrifft.

a) Tangentengleichung:

Die zur Definition von t verwendeten Punkte A, B sollen für das folgende fest gewählt werden. Jede Tangente t bezieht sich jetzt also auf diese A, B , was wir durch die Schreibweise $t(A, B)$ andeuten. Für $t(A, B)$ stellen wir jetzt eine Gleichung auf und zwar in bezug auf ein spezielles Bezugssystem S , das folgendermaßen definiert ist: A, B sind die Fernpunkte (010) , (001) von S und in S hat die C_2 die Gleichung

$$2 x_1 x_2 = x_0^2$$

in den kommutativen x_i . Die Hinzunahme des Faktors 2 wird sich im folgenden als zweckmäßig erweisen. Sie ist statthaft, da die Charakteristik $\neq 2$ sein soll.

Sind ξ, η die inhomogenen Koordinaten des zu t gehörigen Kegelschnittpunktes X , so gelten folgende Darstellungen:

$$\begin{array}{llll} \text{XA:} & x_2 - \eta x_0 = 0 \text{ oder } & x_2 - \frac{1}{2\xi} x_0 = 0 \text{ oder } & h_1 = 0 \\ \text{XB:} & x_1 - \xi x_0 = 0 \text{ " } & \frac{1}{2\xi\eta} x_1 - \frac{1}{2\xi} x_0 = 0 \text{ " } & h_2 = 0 \\ \text{X}(t_A \times t_B): & x_2 - \eta \xi x_1 = 0 \text{ " } & x_2 - \frac{1}{2\xi\eta} x_1 = 0 \text{ " } & h_3 = 0 \end{array}$$

Es ist: $h_1 - h_2 = h_3$.

$t(A, B)$ hat demnach die Gleichung

$$h_1 + h_2 = 0,$$

$$\text{oder: } x_0 - \eta x_1 - \xi x_2 = 0.$$

- b) Es ist also dem Punkt $X(\xi, \eta)$ die Tangente $t(A, B)$:

$$ux_1 + vx_2 + x_0 = 0$$

zugeordnet mit:

$$\begin{array}{l} u = -\eta \\ v = -\xi \end{array} \quad (1)$$

Diese Zuordnung kann man erweitern auf die "Fernpunkte" A, B durch Benutzung homogener Koordinaten x_i, u_i :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 x_0^{-1}, & \bar{u} &= x_2 x_0^{-1} \\ u &= u_0^{-1} u_1, & v &= u_0^{-1} u_2. \end{aligned}$$

(1) geht dann über in:

$$\begin{aligned} u_0^{-1} u_1 &= -x_2 x_0^{-1} \\ u_0^{-1} u_2 &= -x_1 x_0^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Um diese Gleichungen homogenisieren zu können, wählen wir (x_i) halbkommutativ. Als Lösung von $2 x_1 x_2 = x_0^2$ ist (x_i) dann sogar kommutativ. Statt (2) kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0 \\ u_1 &= -x_2 \\ u_2 &= -x_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Hier kann man nun nachträglich auch die Fernpunkte $A = (010)$, $B = (001)$ zulassen und erhält dann gerade die Tangenten t_A, t_B . Es sei ausdrücklich bemerkt, daß (3) bei Beschränkung auf kommutative (x_i) sinnvoll ist: Ersetzt man hierbei einen kommutativen Vektor (x_i) durch einen ebenfalls kommutativen Vektor $(x_i') = (x_i) \cdot r$, so erhält man durch (3) doch wieder dieselbe Gerade. Ist nämlich etwa $x_k \neq 0$ und damit auch x_k' , so braucht man nur (x_i) durch x_k und (x_i') durch x_k' zu dividieren, und sieht die Richtigkeit der Behauptung.

(3) schreiben wir noch in Matrixform:

Die Elemente von $\tilde{u} = \mathcal{L} \bar{u}$ sind hierbei aus dem Zentrum, kommutativ.

c) Es läßt sich nun beweisen, daß $t(A, B)$ unabhängig von A, B ist. Wir wählen ein erstes solches reguläres Paar A, B und dazu ein Bezugssystem S von der oben angegebenen Art. Die Tangente $t(A, B)$ in dem Kegelschnittspunkt X mit dem kommutativen Vektor $\bar{u}$ hat in S den Vektor:

$$\tilde{u}_{t(A, B)} = \mathcal{L} \bar{u}$$

Es werde ein zweites reguläres Hilfspaar A', B' gewählt und die entsprechende Tangente $t(A', B')$ in X gebildet. $t(A', B')$ stellen wir analog dar in Bezug auf ein System S' mit den Fernpunkten A', B' , in dem die C_2 die Gleichung

$$2 x_1' x_2' = x_0'^2$$

in den kommutativen x_i' hat.

Ein System S' der verlangten Art wird offenbar definiert durch:

$$\tau = \tau' \epsilon'$$

$$\text{wobei } \tau = \frac{1}{a' - b'} \begin{Bmatrix} a' + b' & 2a' & b' \\ 2a'b' & 2a'^2 & b'^2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{Bmatrix}$$

und a', b' die Abszissen von A', B' im alten System S . a', b' sind aus dem Zentrum, da A', B' regulär sein sollen.

In S' hat $t(A', B')$ nach b) die Darstellung:

$$\tilde{u}'_{t(A'B')} = \mathcal{L} \tau' \quad (\text{I})$$

wobei τ' ein kommutativer Vektor von X in S' . Ist τ wieder der alte kommutative Vektor von X , so können wir für τ' speziell den durch

$$\tau = \tau' \epsilon' \quad (\text{II})$$

definierten Vektor setzen.

Um die Identität $t(A, B) = t(A', B')$ einzusehen, transformieren wir nun nur noch die Gleichung

$$\tilde{u}_{t(AB)} = \mathcal{L} \tau \quad (1)$$

auf das neue System S' ,

Es ist:

$$\tau = \tau' \epsilon' \quad (2)$$

$$\tilde{u}' = \tilde{u} \tau \quad (3)$$

oder, da die Elemente von τ aus dem Zentrum:

$$\tilde{u}' = \tilde{\tau} \tilde{u} \quad (3')$$

Aus (1) folgt:

$$\tilde{\tau} \tilde{u}_{t(AB)} = \tilde{\tau} \mathcal{L} \tau$$

oder nach (2), (3') :

$$\tilde{u}'_{t(AB)} = \tilde{\tau} \mathcal{L} \tau' \epsilon'$$

Die Matrix $\tilde{\tau}$ genügt nun offenbar der Bedingung:

$$\tilde{\tau} \mathcal{L} \tilde{\tau} = \mathcal{L}$$

wie leicht nachzurechnen, da die a', b' aus dem Zentrum.

Somit ist:

$$\tilde{u}'_{t(A, B)} = \mathcal{L} \tau' \quad (\text{I}')$$

mit

$$\tau = \tau' \epsilon' \quad (\text{II}')$$

Vergleich mit (I), (II) zeigt:

$$\tilde{u}'_{t(A, B)} = \tilde{u}'_{t(A', B')}$$

also $t(A, B) = t(A', B')$ q.e.d.

2) Zusammenhang zwischen C_2 und C^2 .

Es werde jedem C_2 -Punkt P die eindeutig bestimmte Tangente t durch P zugeordnet:

$$P \rightarrow t = t(P) .$$

Wird wieder ein System benutzt, in dem die C_2 die Gleichung

$$2x_1x_2 = x_0^2 \quad (1)$$

in kommutativen x_i hat, und ist (x_i) ein kommutativer Vektor für P , so hat $t(P)$ den Vektor

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0 \\ u_1 &= -x_2 \\ u_2 &= -x_1 . \end{aligned} \quad (I)$$

(1) und (I) ergeben:

$$2u_1u_2 = u_0^2 .$$

Es gilt also

Satz V, 1:

In einer Desarguesschen Ebene mit von 2 verschiedener Charakteristik ist die Tangentenmannigfaltigkeit einer nicht entarteten C_2 eine C^2 .

Man kann nun auch umgekehrt von einer C^2 ausgehen und jeder ihrer Geraden t einen "Berührungspunkt" P zuordnen

$$t \rightarrow P = P(t) ,$$

einfach indem man die Zuordnung $t = t(P)$ dualisiert.

Wählt man ein System, in dem die C^2 durch $2u_1u_2 = u_0^2$ (2)

dargestellt wird, so ist die Zuordnung $P = P(t)$ wieder

durch (I) gegeben, denn diese Gleichungen gehen bei Ver-

tauschung der x_i mit den u_i in sich über. Aus (I) und (2)

folgt für die Punkte $P = P(t)$ die Gleichung

$$2x_1x_2 = x_0^2 \quad (x_i \text{ kommutativ!}).$$

Satz V,1 gilt daher auch in dualer Form.

Weiter erkennt man auf Grund der Symmetrie von (I), daß die Zuordnungen $t(P)$ und $P(t)$ zueinander reziprok sind: Geht man

etwa von einer C_2 aus, ordnet dem C_2 -Punkt P die Tangente

$t = t(P)$ zu, faßt diese dann als Gerade der beigeordneten

C^2 auf und wendet auf t die Vorschrift $P = P(t)$ an, so

kommt man wieder zum Ausgangspunkt P zurück:

$$P(t(P)) = P .$$

Beginnt man mit einer nicht entarteten C^2 , so erhält man entsprechend:

$$t(P(t)) = t .$$

Vermöge $t = t(P)$ kann man nun weiter jeder nicht entarteten C_2 ihre Tangentenmannigfaltigkeit zuordnen:

$$C^2 = T(C_2)$$

und dual mit Hilfe von $P = P(t)$ jeder C^2 ihre "Hülle" :

$$C_2 = H(C^2) .$$

Die Zuordnungen T, H sind ebenfalls zueinander reziprok:

$$C_2 = HT(C_2) \quad (1)$$

$$C^2 = TH(C^2) \quad (2) .$$

Hieran erkennt man

Satz V, 2:

Es gibt zu jeder gegebenen C_2 genau eine C^2 , deren Hülle die C_2 ist, und dual.

Zunächst hat nämlich die $C^2 = T(C_2)$ auf Grund von (1) die geforderte Eigenschaft: $H(C^2) = C_2$ und dies ist auch die einzige derartige C^2 , denn aus der geforderten Darstellung

$$C_2 = H(C^2)$$

folgt nach (2) durch Anwendung von T :

$$T(C_2) = TH(C^2) = C^2,$$

also tatsächlich $C^2 = T(C_2)$.

Aus den Zuordnungsgleichungen (I) können wir noch ableiten

Satz V, 3:

Bei der Zuordnung

$$t = t(P)$$

entsprechen die regulären Punkte der C_2 umkehrbar eindeutig den regulären Geraden der $C^2 = T(C_2)$.

Ist nämlich $P(x_i)$ mit $x_0 \neq 0$ regulär, also $x_1 x_0^{-1}$ aus dem Zentrum, so gilt dies auch für $u_0^{-1} u_2$, da ja die x_i, u_i in (I) als kommutativ vorausgesetzt sind. Weiter gehen die regulären Punkte (010), (001) in die ebenfalls regulären Geraden (001) bzw. (010) über.

Satz V, 4:

Sind P_1, P_2 reguläre Punkte einer C_2 , t_1, t_2 die zugehörigen Tangenten, so gibt es zwischen den Punktreihen t_1, t_2 eine Projektivität

$$Q' = p(Q)$$

so, daß $t = QQ'$ die Tangenten der C_2 durchläuft.

Oder in etwas schwächerer Form:

Je zwei reguläre Tangenten t_1, t_2 einer C_2 werden von den übrigen Tangenten in den Punktpaaren einer Projektivität geschnitten.

Beweis:

Es sei $C^2 = T(C_2)$. Für die C^2 sind nach Satz V,3 die t_1, t_2 reguläre Geraden. Es gibt daher eine Projektivität p mit den Trägern t_1, t_2 , deren Erzeugnis die C^2 ist. Wegen $C^2 = T(C_2)$ leistet p das Verlangte.

Literaturverzeichnis

A r t i n E.

Geometric Algebra

B a e r R.

Linear algebra and projektive geometry, New York 1952

B l a s c h k e W.

Projektive Geometrie

H e s s e n b e r g

Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen,
Math. Ann. 61, 161 - 172, 1905 .

H i l b e r t D.

Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1956.

K n e s e r H.

Schiefkörper und Dualitätsprinzip, Jber. sch.
Math. Ver. 45, 1935.

K ö t h e G.

Schiefkörper unendlichen Rangs über dem Zentrum,
Math. Ann. 105, 15 - 39.

P a s c h M. und M. D e h n

Vorlesungen über neuere Geometrie, Berlin 1926

P i c k e r t G.

Einführung in die höhere Algebra, Göttingen 1951
Projektive Ebenen, Springer Verl. 1955

P r ü f e r H.

Projektive Geometrie, Leipzig 1953

W a e r d e n B. L. van der

Algebra, 1955

Lebenslauf.

Geboren wurde ich am 3. Februar 1926 in München.

Ich besuchte 8 Jahre die Volksschule, 2 Jahre die Städt. Wirtschaftsaufbauschule in München und 2 Jahre die Oberschule a.d. Damenstiftstraße, München.

Im SS 48 nahm ich am Förderungskurs der Universität München teil. Anschließend studierte ich Mathematik und Physik bei den Professoren: Robert Schmidt, Perron, Tietze, Aumann, König, Seebach, Bopp, Gerlach, Rollwagen, Auer, Hettner.

Im Herbst 1953 legte ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen ab, 2 Jahre darauf, nach Teilnahme an einem Pädagogischen Seminar, die Pädagogische Prüfung. Seither war ich als Studienassessor im Bayerischen Staatsdienst tätig.

